Компьютер. Смена парадигмы?

В.И. Рыжик,
к.пед.н., заслуженный учитель России, учитель математики,
лицей "Физико-техническая школа"
при Академическом физико-технологическом университете РАН,
ул. Хлопина, д.8, корп.3 (здание НОК "СПбФТНОЦ" РАН),
8(812) 3107471, (8)911 211 8450
rvi@inbox.ru

АННОТАЦИЯ

В данной статье обсуждаются вопросы и приводятся конкретные примеры, относящиеся к внедрению компьютерных инструментов в школьное математическое образование. Автором описывается опыт собственной работы по внедрению компьютерных инструментов в школьное математическое образование. Этот опыт включает в себя написание учебных материалов для школьников, методических пособий для учителя и контрольных измерительных материалов в тестовой форме; использование программ The Geometer's Sketchpad в геометрии, Geometry Expressions в математике, Derive в преподавании математики. В заключительном разделе статьи приводятся итоги осмысления этого опыта.

The article considers questions and specific examples concerning introduction of computers into school mathematical education. Author describes his own experience in introducing computer tools. This experience includes writing textbooks for school students, writing methodical manuals for teachers, developing examination materials in the test form, using software "The Geometer's Sketchpad" in geometry course, using software "Geometry Expressions" in math course, and using software "Derive" in math course. The final part of the article concludes the comprehension of the experience received.

Ключевые слова

Математика, геометрия, компьютер, тест, эксперимент

Mathematics, geometry, computer, test, experiment

Поначалу я (и многие мои коллеги) скептически относился к идее внедрения компьютера в школьное математическое образование. Такое отношение имеет «исторические корни». Когда я ещё учился в вузе, меня обучали показывать кинофильмы. Потом была волна учебного телевидения – несколько раз мне довелось рассказывать телезрителям – абитуриентам о решении конкурсных задач. Когда – то внедрялись в школу «суперметоды» образования – ростовский метод, липецкий метод… Давно забытые веяния….

Для меня всё переменилось в одночасье, когда я увидел на дисплее моментальное разложение на множители выражения $n^4 + 4$. (Эта задача встречается в олимпиадных сборниках как теорема Софи Жермен). Тут-то я и начал думать – что и как можно сделать в школе с помощью компьютера. (Сразу оговорюсь – речь идёт, конечно, о программном обеспечении. Говорить « компьютер» мне привычнее).

Шапочное знакомство с компьютером у меня произошло достаточно давно. В 1962 году я начал работать в 239 школе, в которой стали готовить программистов, использовали ЭВМ «Урал», затем «Минск-22». И нас, учителей математики, немного просвещали. Довелось затем вести в массовой школе курс информатики, когда его только ввели, даже обучал школьников языку «Basic» – кто сейчас помнит такой язык начального программирования? Мои ученики ходили на практику в Технический университет (тогда Политехнический институт), на экскурсию – в вычислительный центр Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе. Видел, как школьникам всё это было интересно.

Пытался сам программировать, освоил редактор «ChiWriter», в нём можно было набирать математические символы. На машинке больше не печатал.

А потом – пошло, поехало.

Так что мой путь к использованию компьютера для преподавания математики был не прямой и долгий. На первых порах было непросто, помогали бывшие ученики. И по сию пору они учат меня компьютерным премудростям.

I. Первая программа, с которой я имел дело в преподавании (лет 15 тому) – Derive; она создана для решения математических задач. Приведу некоторые из них, которые я предлагал на специальных уроках, проводившихся в компьютерном классе.

1) Каково влияние параметра на график функции? К примеру, что происходит с графиком $y = x^2 + x + 1$, когда второй коэффициент будет изменяться? То есть, что происходит с графиком $y = x^2 + ax + 1$ при изменении a?
2) Как изменяют известный график некоторые «добавки»? Например, что будет, если вместо функции $y = \sin(1/x)$ рассматривать такие: $y = x\sin(1/x)$, $y = x^2\sin(1/x)$.
3) Каковы свойства кривых третьего и четвёртого порядка (циклоиды, астроиды, лемнискаты, трактрисы….) Вряд ли такое возможно в школе при «бескомпьютерном» обучении.

Расскажу чуть подробнее, что происходило, например, при изучении декартова листа. Его уравнение: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (рис. 1).

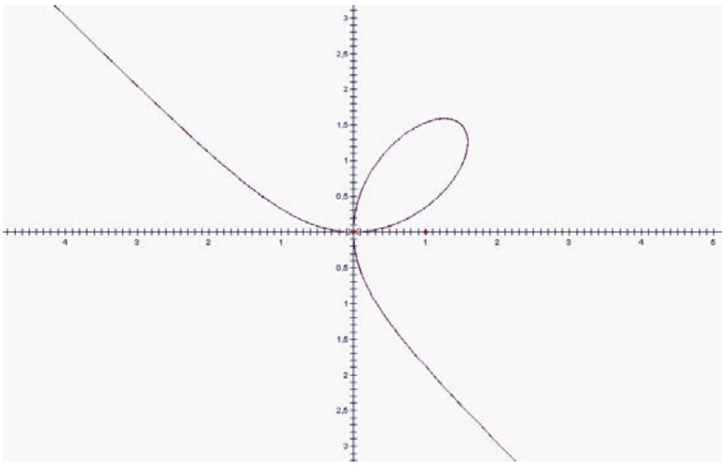

Рис.1. Декартов лист, заданный уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, выведенный программой Geometry Expressions

Вначале учёные полагали, что кривая представляет собой только петлю (в первой четверти), затем Х. Гюйгенс и И. Бернулли « нашли» у неё два «хвоста».

Итак, ученики на дисплее видят эту кривую, и я спрашиваю: какие свойства кривой вы увидели? Можно увидеть симметрию относительно прямой $y = x$, наклонную асимптоту, существование в первой четверти точки, которая более всего удалена от начала координат (точки «возврата» кривой, начиная с которой кривая «поехала назад»).

Наблюдение - только начало работы. Затем начинались поиски доказательств. Например, как можно из уравнения вывести, что у декартова листа есть асимптота?

Дальше я предлагал ввести параметр и понаблюдать за кривой $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ при изменении параметра *a:* какие свойства сохраняются, какие – нет.

В результате этих занятий поменял обычную методику изучения функции. Традиционно мы, исследуя функцию и глядя на формулу, начинаем выяснять: какова область определения, что там с симметрией, пределами, экстремумами… И в конце появляется график. Работая с компьютером, мы начинаем «с конца», идя от графика функции к её свойствам.

Ученики по итогам своей работы над конкретной задачей писали отчёт. Некоторые отчёты был столь впечатляющи, что я до сих пор храню их, рука не поднимается выкинуть.

Я разрешил ученикам использовать Derive на уроках математики и даже на переводных экзаменах.

II. Спустя некоторое время, одна американская благотворительная организация подарила школе 10 микрокомпьютеров TI-92. На первом же занятии я попросил ребят ввести в компьютер условия задач тогдашнего государственного экзамена по алгебре за девятилетку, из шести задач верный ответ был выдан в пяти! (Шестая задача была текстовой).

На меня этот случай произвёл очень сильное впечатление - что-то надо делать с курсом математики. Появилась даже идея создать курс «компьютерной математики». Замысел был таков: подобрать задачи, которые не могут быть решены только компьютерными средствами, но без них решения весьма затруднительны.

Ну, например: доказать, что число $444...4888...89$ (вместо точек стоит вначале цифра 4, затем – цифра 8, четвёрок на одну больше, чем восьмёрок) является точным квадратом. Последовательно увеличивая разрядность в этом числе, можно сформулировать гипотезу, она проверяется на компьютере, после чего переходим к её доказательству.

Было несколько вариантов использования TI-92. Покажу на примере.

Скажем, предлагается функция $y = \frac{2}{x^2+12x+36} - \frac{12}{x^2-36}$, про которую задавался ряд вопросов.

Один такой: при каких x выполняется равенство $y(x) = \frac{1}{x-6}$?

И упрощение исходного выражения, и решение полученного уравнения можно проделать на компьютере, поэтому возможны разные пути. Работая над заданием, ученики могли найти ответ с помощью компьютера, затем его обосновать в письменном решении; могли сами вначале найти ответ, а затем проверить его на компьютере. Некоторые ребята вовсе не доверяли компьютеру. У них были для этого основания. В некоторых случаях он действительно «выдавал» не то, что надо, например, выражение 1/0 или корни уравнения, выходящие за его область определения.

Такое использование компьютера поставило много вопросов. Что позволительно?

Например, если в руках школьника калькулятор, надо ли его учить таблице умножения? Есть разные мнения, многое зависит от целей, компьютер в учебном процессе – всего лишь средство для их достижения, годное или нет. Когда и как его использовать – зависит от ситуации.

Пусть – в разумном случае – ученик получает ответ на компьютере, коль скоро это возможно, и работает далее. Или, если нам такое не нравится, давайте предлагать те задачи, в которых компьютер – плохой помощник или не помощник вовсе.

Вопрос о доверии к компьютеру меняет акценты также и в деятельности ученика, работая на развитие его критического мышления. Очень желательно предвидение результата. Например, перед появлением графика функции на дисплее, полезно представить себе её поведение на бесконечности. Ещё пример: при решении неравенства полезно прогнозировать, что должно получиться: промежуток или объединение двух не пересекающихся лучей и т. п.

III. Другая часть моей работы, связанной с компьютером – создание компьютерного варианта тестовой проверки. Первые тесты, которые были мной составлены лет 20 назад (по алгебре и началам анализа), а затем «положены в компьютер», появились по заказу тогдашнего Министерства высшего образования; их нынешняя судьба мне неизвестна. Сразу оговорюсь, что идеология этих тестов не является традиционной. Подробно о ней можно узнать из работы [1].

Затем я частично опробовал эти же тесты (в другой компьютерной редакции) у американских школьников. Мне была очень интересной их реакция. Ребята учились в школе-интернате при университете штата Арканзас. Тесты им понравились, (я до сих пор храню их отзывы), хотя особо успешных результатов не было. Возможно, сработал эффект необычности – американские тесты «идеологически» совсем другие.

Первоначальный банк тестов впоследствии был пополнен. Он получил компьютерную поддержку в ИПО (Институте Продуктивного Обучения) от его сотрудников (С. Поздняков, С. Энтина, С. Иванов, Д. Бородин) – это был уже третий компьютерный вариант [2].

Он проверялся на учениках нашего города, Санкт-Петербурга. Ученики приезжали в лабораторию института, усаживались по одному за компьютеры, получали тестовые задания, затем распечатанные результаты тестирования. Любопытно, что в целом эти результаты соответствовали их школьным учебным достижениям.

В 1998 году вышла небольшая книжица с моими тестами по алгебре и началам анализа. Они получили название «тестов готовности для продолжения математического образования» [3]. Затем я составил «тесты готовности» по геометрии – с той же идеологией. Издательство «Просвещение» выпустило существенно расширенный вариант (сейчас тестов порядка 1000) «тестов готовности» по алгебре и началам анализа [4], а также «тестов готовности» по геометрии [5]. Некоторые «тесты готовности» вошли в учебники по геометрии, написанные при моём участии [6], а также в инновационный учебно-методический комплекс по геометрии для 9 класса. Последний есть на сайте Министерства образования.

Существует диск с компьютерной версией «тестов готовности» по алгебре и началам анализа, сделанный в ИПО, а также его интернет-версия.

Идеология «тестов готовности» поддержана во всероссийском математическом конкурсе «Кенгуру для старшеклассников». Подробно о ней рассказано в книге для учителей [1].

III. Теперь перейду к среде «Живая математика». Раньше я был знаком только с американским вариантом этой среды (The Geometer's Sketchpad), сейчас она переведена на русский язык и получила новое название.

Как я понял, основное применение этой среды – геометрия. Три основных направления в преподавании геометрии (согласно тому, как это сформулировал А.Д. Александров) [7] – развитие пространственного мышления, логическое обоснование и прослеживание её связи с практикой.

Я подбирал соответствующие этому пониманию задачи. Вначале их было чуть больше 20. Окончательную редакцию они получили в совместном российско-американском проекте. В дальнейшем для всероссийского конкурса ИИСС (Информационные источники сложной структуры) мной было подобрано ещё около 20 задач.

Основная идея созданной при этом методики такова. Берется достаточно содержательная задача. Желательно, чтобы она имела прикладную окраску (прикладной оттенок в задаче появляется из головы составителя – получается нечто вроде "сказочки" – и это неизбежно, так как действительно практических задач в школьном курсе геометрии не так уж и много). Затем ученикам предлагается перевести текст задачи на геометрический язык.

На первом этапе подступа к решению задачи ученикам предлагается мысленно представить ситуацию и предугадать возможный результат.

Далее – задача моделируется на компьютере. В результате моделирования и наблюдения за происходящим на экране появляется разумная гипотеза. Она сопоставляется с первоначальным предположением, затем проверяется контрольными наблюдениями. Для подтверждения этой гипотезы проводится неформальное (не слишком строгое) рассуждение – хорошо бы понять, на основании чего происходит то, что мы наблюдали.

Далее – при желании или необходимости – проводится достаточно строгое доказательство. Наконец, должна быть возможность развития темы, так называемого «расширения»: исходная задача – первая в цепочке задач, с ней связанных. Эту цепочка предлагается ученикам для дальнейших наблюдений и размышлений. Тем самым, мы переходим к деятельности, которую я называю учебно-исследовательской. Основное её «организационное» отличие от традиционной учебной деятельности – появление «стрелы задач» – то есть в пределах одной ситуации возникает ряд вопросов вместо одного. Но истинное исследование начинается тогда, когда решатель начинает ставить вопросы самостоятельно.

Приведу несложный пример одной из предложенных задач – «о лестнице». Имеется лестница постоянной длины, она перемещается в вертикальной плоскости, упираясь концами в стену и пол. Какова траектория середины лестницы?

Прежде чем проводить компьютерный эксперимент, ученикам предлагается представить себе эту траекторию. А затем проверить предположение на компьютере. При проведении эксперимента получается четверть окружности, и не каждый догадается до такого ответа, «увидит» его. Однако возникает вопрос. Мы считаем, что линия на дисплее – это дуга окружности, но окружности ли это на самом деле?

Оказывается, можно это проверить в той же среде: построить окружность с центром в начале координат и увеличивать её радиус, пока часть увеличивающейся окружности не совпадёт с построенной траекторией. Можно проверить иначе: поставить точку на траекторию, после чего измерять расстояние от переменной точки траектории до начала координат. Перемещая точку по полученной траектории, убедимся, что расстояние от неё до начала координат не меняется.

После такой работы с задачей переходим к логическому доказательству. Его можно осуществить методом координат; можно и в классическом стиле, если заметить, что середина лестницы – середина гипотенузы (лестницы) прямоугольного треугольника. А медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы (длины лестницы), то есть её длина постоянна.

Как здесь выглядит «стрела задач»? Чуть изменим условие. Допустим, точка не в середине лестницы, а в другом месте. Проверим, какова теперь траектория. Если точка близка к середине, то кажется, что вновь получена дуга окружности. Однако при проверке (указанной выше) увидим, что расстояние между началом координат и движущейся точкой будет меняться, так что получается не окружность. В общем случае получается эллипс и достижение учеником этого результата – немалое достижение.

Покажу ещё одну задачу, которая произвела сильное впечатление на моих американских коллег.

Итак, задача о пиратах.

В 1785 году на маленьком острове в Карибском море пираты закопали клад. Для того, чтобы впоследствии найти клад, они в качестве ориентиров заметили две высокие горы и пальмовое дерево. Впоследствии записка с описанием поиска клада попала к исследователям.

Текст записки гласил:

"От пальмы идите к Соколиной горе и считайте шаги. Затем поверните под прямым углом направо, сделайте такое же количество шагов, и воткните в землю палку.

Вернитесь к пальме и идите к Орлиной горе, считая шаги. Поверните под прямым углом налево и сделайте такое же количество шагов. Воткните в землю другую палку.

В этом случае клад будет точно посередине между двумя палками".

Исследователи нашли обе горы, но пальмы на месте уже не было. Можно ли им теперь найти клад?

Для тех, кто не знает геометрию, ситуация кажется безнадёжной. Проведём компьютерный эксперимент, перемещая точку, соответствующую пальме.

Увидим, что точка, обозначающая клад, не перемещается!

Но тогда положение клада не зависит от расположения пальмы. Тогда пусть точка – пальма совпадает с точкой – горой (одной из гор), после чего клад находится моментально. Без компьютерного эксперимента сделать вывод о том, что положение клада не зависит от положения пальмы – непростое достижение.

После этого начинается разговор – почему так произошло, как это можно объяснить?

Учениками было отмечено, что построения в Sketchpad в процессе исследования помогли им придти к доказательству.

Оно таково, как на рис. 2,

где

точка T обозначает пальму,

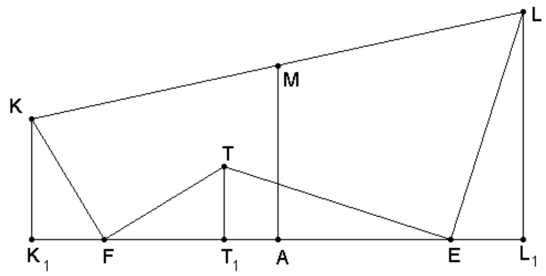

Рис. 2. Схематический рисунок, соответствующий условию задачи о пиратах, выведенный программой Geometry Expressions

точки K и L – обозначают палки,

точки F и E – точки поворота (горы),

точки K_1, A, T_1, L_1 – проекции точек K, T, M, L на прямую EF.

Построим прямую EF (полагаем, что точки K, L и T расположены по одну сторону от прямой EF), проведем к ней перпендикуляры из точек K, M и L. Поскольку $KK_1 \perp EF$, $MA \perp EF$, $LL_1 \perp EF$, то $KK_1 \| LL_1$, поэтому KK_1LL_1 – трапеция. (В случае $KK_1 \perp LL_1$ трапеция становится прямоугольником). $MA \perp EF$ и $KM = MLA \Rightarrow MA$ – средняя линия трапеции $\Rightarrow MA = \frac{1}{2}(KK_1 + LL_1)$. ΔFKK_1 и ΔFTT_1 – прямоугольные треугольники с равными гипотенузами, поскольку $FK = FT$ по построению. Поскольку $KK_1 \perp FT_1$ и $KF_1 \perp FT$, получаем: $\angle K_1KF \perp \angle TFT_1$, следовательно, $\Delta FKK_1 \perp \Delta TFT_1$ и $KK_1 = FT$. Аналогично доказывается, что $\Delta ELL_1 \perp \Delta TFT_1$ и $LL_1 = ET_1$.

Далее, $MA = \frac{1}{2}(KK_1 + LL_1) = \frac{1}{2}(FT_1 + ET_1) = \frac{1}{2} EF$.

Поскольку расстояние EF постоянно, длина отрезка MA также постоянна. Кроме того, поскольку MA – средняя линия трапеции, $K_1A = AL$. Из равенства треугольников, доказанного выше, следует, что $TT_1 = K_1F = EL_1$. Следовательно, $FA = AE$, то есть A – середина отрезка EF.

Таким образом, точка M лежит на серединном перпендикуляре к EF на расстоянии половины длины EF от этого отрезка.

Окончательный вариант задач появился в результате совместной работы (с американскими коллегами (в первом случае) [8], с С. Ивановым (во втором случае).

В 2002-2004 годах проект, включающий первые 20 задач, был экспериментально проверен в России и США. В проекте участвовали некоторые школы Санкт-Петербурга и Ленинградской области. В США материалы использовались в Peddie School in Hightstown, New Jersey, и в Paul Robeson High School in Brooklyn, New York.

Эксперимент показал, что такое изучение геометрии позволяет одновременно достичь нескольких педагогических целей и помогает школьникам открывать для себя математику. Кроме того, студенты в США, принимавшие участие в данном проекте, показали заметно лучшие результаты на стандартизированных экзаменах, таких, например, как New York City Regents (выпускные экзамены, необходимые для получения аттестата зрелости) and SATs (вступительные в вуз), по сравнению с контрольной группой студентов, не использовавших эти учебные материалы.

Любопытны детали проведённого эксперимента. В качестве неформального подтверждения возникшей гипотезы ученики проводили порой реальный эксперимент, используя чертёжные инструменты, и даже реальные объекты. Например, девятиклассница из Peddie School, решая задачу о пиратах, испекла торт с кольцом, спрятанным внутри. Её одноклассники, чтобы найти местоположение кольца, использовали на поверхности торта рассмотренный в задаче метод построения. Десятиклассники из Paul Robeson school при решении задачи раскладывали верёвки на полу.

Учителя, проводившие этот эксперимент отметили, что:

1) повышается мотивация учеников;

2) при помощи компьютерных инструментов решение задач становится доступно более широкому кругу учащихся;

3) экономится много времени по сравнению с построением циркулем и линейкой, поэтому остаётся больше времени на обсуждение, анализ, доказательство;

4) возросшие успехи при решении задач с помощью компьютера улучшают отношение к математике в целом;

5) методику, разработанную в этом эксперименте для решения задач, можно использовать в других курсах математики.

Учителя отмечали также, что использование программы эффективнее, если работать со специальными классами задач – на оптимизацию, на геометрическое место точек, а также предполагающими исследование большого количества случаев перед тем, как можно будет сделать вывод.

IV. Около 3 лет назад был объявлен конкурс ИУМК (Инновационный учебно-методический комплекс) – говоря о тестах, я упоминал о нём. Мне довелось быть в команде, создавшей этот комплекс.

Наш комплекс оказался среди победителей конкурса, и была проведена экспериментальная его проверка в нескольких школах России. Отзывы учителей – положительные. Сейчас комплекс выложен на сайте Министерства образования.

Комплекс содержит следующие элементы:

* учебное пособие «Геометрия 9 (Динамическая геометрия)» (на основе учебника А. Александрова и др.);

* рабочие тетради к каждому из разделов учебного пособия («Векторы и координаты», «Преобразования», «Фигуры вращения») [9];

* книга для учителя.

Все учебные материалы, входящие в состав ИУМК, представлены не только в форме электронной, но также и на бумажных носителях.

Вот некоторые особенности этого ИУМК:

* для иллюстрации новых понятий используются динамические модели;

для визуализации основных идей и поддержки новых видов учебной деятельности применяются специально созданные компьютерные манипуляторы,

*текст электронного пособия позволяет параллельно работать со статичными рисунками и динамическими моделями,

* компьютерные инструменты позволяют школьнику проводить наблюдения в динамической ситуации, затем выдвигать гипотезы и проверять их,

* включение в курс стереометрического материала, излагаемого наряду с планиметрическим, позволяет более полно развивать пространственное мышление школьника,

* интерактивные модели позволяют сделать процесс решения сложной задачи более наглядным,

* необходимой частью ИУМК являются занимательные и практические задачи,

а также факты из истории геометрии,

* задачи дифференцированы по рубрикам, ориентирующим на определенную деятельность ученика, как – то: «Разбираемся в решении», «Дополняем теорию», «Смотрим», «Рисуем», «Работаем с формулой», «Планируем», «Доказываем», «Исследуем» и т.д.

В электронной книге для учителя приводятся подробные инструкции по работе с компьютерными инструментами, в частности, указания по работе с информационными источниками.

В рабочей тетради ученикам предлагаются упражнения в конструктивной деятельности со специально созданными компьютерными инструментами. Интерактивные задания предлагаются в форме аплетов и могут использоваться под любым браузером, в котором установлена Java-машина.

Работа с интерактивной электронной рабочей тетрадью может происходить в разных режимах:

* для регулярного использования на уроках математики,

* для проведения лабораторных работ в компьютерном классе,

* для занятий за домашним компьютером, не являющихся обязательными и дополняющих традиционный учебный процесс.

В результате использования ИУМК, в частности:

* развивается пространственное мышление школьников,

* на основе работы в интерактивном режиме формируются исследовательские умения (выдвижение гипотез и проверка их),

* формируется самостоятельность при решении нетиповых задач,

* повышается уровень рефлексии при самоанализе своих знаний («знаю, что я знаю») и, тем самым, уровень понимания.

Для проведения занятий с помощью этого комплекса в распоряжении учителя должен находиться компьютерный класс (ОС Windows 2000 или выше), дополнительно оборудованный мультимедийным электронным проектором и экраном. Количество компьютеров в классе должно быть не меньше числа учеников.

Возможно также проведение части занятий в обычном классе, оборудованном учительским компьютером и электронным проектором.

V. Я принимал участие в создании дистанционного курса геометрии для школ Ленинградской области. Его идея ясна. Если школьник не имеет выхода на достаточно квалифицированного учителя, или, скажем, проболел довольного много, то с помощью Интернета можно выйти на материалы, размещённые на специально созданном сайте, и обучаться геометрии самостоятельно. На сайте находятся также учебники для всех классов (написанные авторским коллективом во главе с академиком Александровым, в котором я состою), тесты и контрольные работы.

VI. Ещё одна сделанная работа при моём участии - создание компьютерной поддержки школьному курсу алгебры и начал анализа. В рамках проекта подготовлена (совместно с С. Ивановым) серия обобщающих заданий на геометрические преобразования графиков функций и других фигур, заданных аналитически. В них содержится теоретический материал, примеры, упражнения и тесты, а также фрагменты уроков по этой теме.

С помощью компьютерных инструментов (среда «Живая математика».) иллюстрируется связь между изменением аргумента функции и её новым графиком, а также другие соотношения между уравнениями (неравенствами, системами) и их графиками. Демонстрируется также влияние параметра при решении уравнений, (неравенств, систем). Часть заданий предполагает использование Интернета. Эти задания находятся на сайте Лицея «Физико-техническая школа», в котором я работаю [10].

YII. Программа Geometry Expressions в России пока неизвестна. Мне довелось (вместе с американскими коллегами) принять участие в разработке учебных материалов по алгебре, геометрии и началам анализа, соответствующих этой программе [11], [12], а также в готовящейся к выпуску книги " Calculus Explorations with Geometry Expressions" (I. Lyublinskaya, V. Ryzhik) .

Экспериментальная проверка этих материалов ведётся в двух школах США и в России – на моих уроках геометрии в 9 классе. Её важная особенность – работа с символьными выражениями. Например, если задать стороны треугольника в буквенном виде, программа выведет аналитическое выражение неизвестной величины – скажем, медианы треугольника (рис. 3).

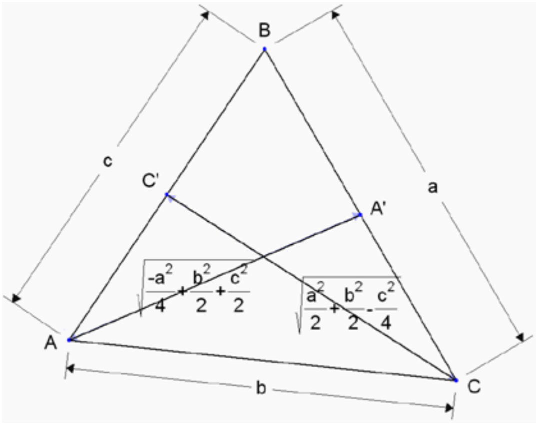

Рис. 3. Треугольник и две его медианы,
выражения для которых выведены программой Geometry Expressions

Теперь, используя полученные выражения для двух медиан, можно доказать равенство двух соответствующих сторон треугольника, если эти медианы равны. Тем самым программа приобщает школьников к использованию алгебраического метода доказательства геометрического утверждения. Кроме того, вид полученного выражения для медианы помогает найти само доказательство формулы медианы.

Вот ещё пример задачи, решаемой с помощью этой программы.

Рассмотрим ветвь гиперболы $y = a / x$, *расположенную в первой четверти, и прямоугольник, две стороны которого лежат на осях координат, а одна вершина на гиперболе. а) Установить, принимает ли площадь такого прямоугольника наибольшее или наименьшее значение, б) Найти экстремальное значение периметра такого прямоугольника и определить, является оно минимальным или максимальным.*

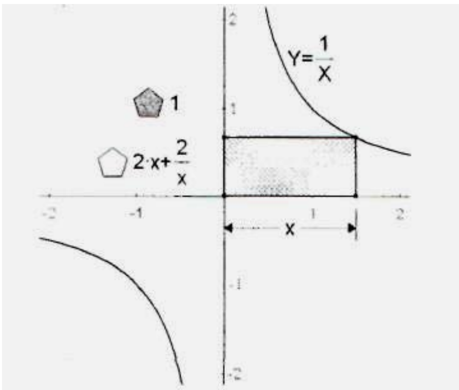

Рис. 4. Выведение графика гиперболы $1/x$,
прямоугольника, соответствующего условию задачи
и значения площади и периметра
программой Geometry Expressions

В процессе исследования с помощью программы школьники прослеживают изменение, как площади, так и периметра (в общем виде), перемещая точку по гиперболе, затем работают с аналитическим выражением площади (и периметра) через координаты переменной точки.

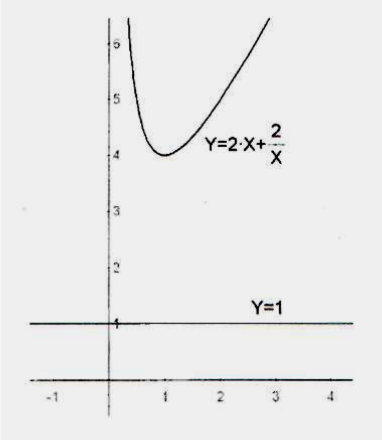

Рис. 5. Выведение графика периметра и площади искомого прямоугольника программой Geometry Expressions

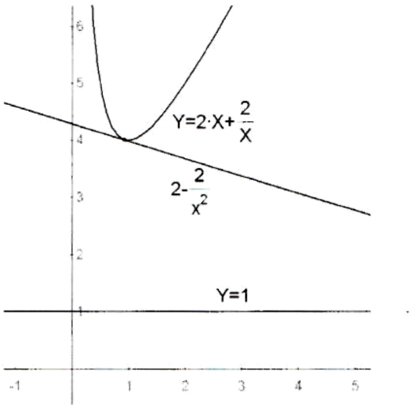

Рис. 6. Выведение графика периметра искомого прямоугольника, касательной к нему в произвольной точке и значения её углового коэффициента программой Geometry Expressions

Рассматривая рисунки, школьники придут к выводу, что площадь прямоугольника не зависит от положения переменной точки, а для нахождения экстремального значения его периметра придётся воспользоваться сведениями из алгебры и анализа. В этом случае полученное аналитическое выражение помогает не только выдвинуть гипотезу, но и обосновать её. Но программа и тут поможет.

Уроки по геометрии с использованием этой программы я вёл в двух компьютерных классах (вместе с М.Э. Дворкиным). Была установлена локальная сеть, школьники получали задачу по этой сети с учительского компьютера. Окончательно они доделывали задачу дома и предъявляли её решение в виде файла в формате Word. Дома они также могли использовать эту программу, демоверсией которой можно пользоваться на протяжении одного месяца с момента скачивания.

Эффективно и выразительно эта программа помогала в решении геометрических задач разных типов, особо отмечу задачи на установление траектории и восстановление фигуры по точкам.

Методика составления задач (а их составлено всего порядка 60) такая же, как и при составлении задач с применением «Живой математики».

YIII. В заключение – несколько общих соображений об использовании компьютера в математическом образовании школьников – осмысление собственного опыта почти двух десятилетий.

1. Использование компьютера в школе является откликом на возникновение « компьютерной цивилизации» и, тем самым, важно для среднего образования в целом.

2. Со временем использование компьютера станет привычным в школьном деле, поэтому хорошо бы вписать его в педагогическую систему «компьютер, учитель, ученик» [1].

3. Громадное значение для развития важнейшего параметра математического мышления – пространственного мышления – имеет динамическая картина, возникающая на дисплее. Уже одно это избавляет учителя от переживаний о «потерянном времени», которое необходимо в больших количествах для серьёзного включения компьютера в образование.

А если эта картина появляется ученику в результате его собственной работы с компьютером, то она способствует лучшему пониманию, поскольку понятно её происхождение.

4. Коль скоро математику можно считать наукой экспериментальной [13] или использующей компьютерное экспериментирование [14], коль скоро при изучении математики экспериментирование как таковое приветствуется [15], вполне естественно внедрять его в арсенал дидактических средств. Компьютер многократно увеличивает возможности и роль математического эксперимента.

5. В результате использования компьютера происходит сближение теоретической и прикладной математики. Идеология прикладной математики, в частности, использование в ней рациональных рассуждений [16] демонстрирует «математику с человеческим лицом».

6. Использование компьютера увеличивает возможности для дифференцированного обучения, а также к более полному вниманию к работе каждого ученика.

Некоторые из этих положений требуют хотя бы краткого комментария [17].

Чрезвычайно важный вопрос, на который я должен сам себе ответить: что для меня компьютер применительно к математическому образованию? Иллюстратор? Арифмометр? Справочник? Поставщик нехитрой информации? Сам себе отвечаю так: компьютер – это как прибор для физика, скажем, осциллограф.

В понимании компьютера как прибора много аспектов. Главный из них, как думается – психологический.

В какой степени мы можем доверять прибору, в нашем случае - компьютеру? Что бесспорно, что сомнительно, и что вообще не внушает доверия? Нужна ли перепроверка? На другом компьютере? Сколько раз? Ставить ли под сомнение программу?

Далее. Экран дисплея – множество дискретных точек. Существует неустраняемая погрешность. Влияет ли она на результат, и если да, то на какой? В частности – и прибор может выдать странный результат, и компьютер может выдать нечто странное (к примеру, выражение 1/0). Поэтому полезно иметь предвосхищение результата – что должно быть? Если полученный результат соответствует ожиданиям, то появляется уверенность в его истинности, а если нет ожидаемого соответствия – придётся проверить разумность предположения.

Например, ученик может полагать, что высоты треугольника пересекаются в нем самом или, что треугольник с большими сторонами имеет большую площадь – компьютер обнаружит это заблуждение. Наконец, компьютер может выдать совсем неожиданный результат. В моём личном опыте было такое. Я решал задачу, связанную с прямой Симсона [18]. Бумажные рисунки не вывели прямую за исходную окружность. Компьютер показал и такую возможность.

Далее. Благодаря компьютеру в преподавании математики появляются новые возможности и для проведения эксперимента, и для большей его эффективности.

Экспериментальные действия при изучении математики поощрялись издавна, ибо несомненна их роль в формировании учебной, исследовательской и критической деятельности. Например, рекомендовалось организовать проверку (на листе бумаги с помощью транспортира) теоремы о сумме углов треугольника. Реально у детей в таком «бумажном» эксперименте 180 градусов почти никогда не получается – сам проверял.

Кроме того, число реальных экспериментов конечно (как-то я проверял с учениками получение приближённого значения π в игре Бюффона – было сделано порядка 1000 бросаний иглы на клетчатую бумагу, куда уж больше). Компьютерный эксперимент в геометрии, основанный на динамической иллюстрации, убедителен – видимо, потому, что имеет континуальный (психологически) характер.

Включение компьютерного эксперимента для получения ответа в задаче ставит вопрос о степени к нему доверия. Можно ли считать полученный ответ доказанным? Всегда? Иногда? Никогда?

Возьмём ситуацию – компьютер показывает, что «как ни гоняй» треугольник по экрану, меняя его вид, три его медианы всегда имеют общую точку – надо это затем доказывать или не надо?

Ответ на этот вопрос упирается, в частности, в толкование термина «доказательство». Хотя бы доказательство в математике. Хотя бы в её первоначальном преподавании.

А что говорят на этот счёт сами математики ? Как правило, то, что доказательство – понятие неформальное, оно из психологии. В. Успенский [19] прямо пишет, что толком ничего не доказать даже про натуральный ряд. Если толковать изображение на дисплее именно как проверку истинности некоторого утверждения, то результат, проверенный с помощью компьютера, и принятый нами, имеет смысл считать доказанным.

Более того, я называю принятый нами результат компьютерного эксперимента компьютерным доказательством (в отличие от дедуктивного или рационального).

Можно предложить и специальные договорённости, в каком случае результат манипуляций с компьютером считать доказанным. Именно, если:

– результат получен сначала в частном случае;

– обобщение сформулировано на основе полученного результата;

– последовательность шагов при доказательстве общего утверждения такая же, как при доказательстве частного утверждения;

– ситуация, смоделированная в программе, адекватно отражает условия, которые содержатся в общем утверждении;

– использование программы позволяет проверить полученный результат на континуальном (психологически) уровне.

Эти условия можно иллюстрировать на простом примере: графики функций $y = f(x)$ и

$y = -f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс [11].

В статье «От доказательства с использованием компьютера к компьютерному доказательству» [20] показано, как эти условия реализуются на простом конкретном примере: графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс.

Ответ на вопрос о степени доказанности зависит также от поставленной цели. Если нам нужен некий факт, а откуда он взялся, нам «без разницы» – тогда примем этот факт от компьютера и начнём решать последующие задачи, его используя. А если не хватает уверенности в достоверности полученных результатов, то придётся искать логическое обоснование.

(Аналогично отношение у физика к любому прибору: если осциллограф показывает некую кривую, то либо его показания используются для дальнейшего, либо начинаем думать, а почему он показывает именно такое?).

Двинемся дальше. Если считать доказанным результат, полученный в компьютерном эксперименте, то возможно движение дидактической мысли к методам доказательства, характерным для прикладной математики (прикладного аспекта математики). В таких доказательствах, как известно, часто используются рациональные рассуждения, основанные на наглядности, непрерывности, симметрии, механике [16]. Такого рода доказательства вынужденно находятся в школьном курсе математики; например, никому в голову не придёт доказывать школьникам то, что две пересекающиеся прямые делят плоскость на 4 части. В конце концов, мы же не рассказываем математику на уровне её оснований!

Мне ясно, что внедрение компьютера влияет на решение общих проблем образования

* Использование компьютерных доказательств и соответственное подключение рациональных рассуждений делает преподавание более «мягким», если можно так выразиться, более гуманитарным. Всячески подчёркивая логическую составляющую в курсе геометрии, мы должны все время помнить, что логика изложения систематического курса мало похожа на то, как на самом деле добываются знания, какова при этом роль геометрического воображения, прагматической и интеллектуальной интуиции.

> Да и сам школьный предмет должен показать ученикам, что математика – не только логика и даже не в первую очередь логика. Школьный её курс потому так и ценится, потому и оправдан для всех, что учит воспитанника преодолевать интеллектуальные трудности в абстрактном мышлении

* Использование компьютера в интерактивном режиме обеспечивает высокую степень индивидуализации, то есть способствует гуманизации математического образования.

> Компьютер – несомненный посредник между практическим и теоретическим уровнем понимания математики.

* Компьютер убирает страх перед математикой у иных учеников. Даже слабые ученики могут самостоятельно вести наблюдение и обсуждать увиденное. Из пассивных или почти отключенных от процесса добывания знаний они в какой-то степени превращаются (хоть немного) в активных его участников.

В образовании, как и в обществе в целом, идёт «ползучая компьютерная революция». Поясню одним забавным примером. В 1997 году на международной конференции в США (в Индианском университете) я рассказывал, как в школе можно использовать Derive. Организаторы спросили, что мне нужно для выступления, я попросил доску, мел и тряпку. В университете началась лёгкая суматоха, не сразу всё это было найдено. По ходу выступления я ощутил чрезвычайный интерес со стороны аудитории и местной прессы, фотографы старались вовсю. Потом только понял, чем он был вызван. Вряд ли содержанием доклада – я, с мелом и тряпкой в руке, был единственным «реликтовым» участником конференции, напомнив собравшимся о «доисторических» временах в образовании. Уже тогда для остальных, собравшихся со всего света, это был вчерашний день образования.

Нам повезло: мы видели, как началась «компьютерная революция». И даже можем поучаствовать в её продвижении – как в тех направлениях, о которых я рассказал, так и в иных, сейчас нам неведомых. Мне ясно, что преподавание математики, скажем, через 100 лет, благодаря компьютеру будет совсем другим. Вместе с тем компьютер – не панацея. Одни проблемы уйдут, появятся другие.

И, наконец. Что такое компьютер в общем контексте достижений цивилизации? В конечном счёте – ещё одно устройство, которое позволяет нам сэкономить время для обычной жизни. Хотя бы один час в неделю, отнятый от регламентированного образования, оправдает те громадные расходы, которые делаются всем миром для совершенствования компьютеров, их программного обеспечения и всевозможного использования.

Литература

1. Рыжик В.И. 30 000 уроков математики. Книга для учителя . – М.: Просвещение, 2003. – 289 с.
2. Бородин Д.В. Тесты готовности к продолжению математического образования / С.Г. Иванов, В.И. Рыжик. – СПб: Изд. ЦПО "Информатизация образования", 2002. – 15 с.
3. Рыжик В.И. Тесты готовности к продолжению образования. Числа. – СПб: Оракул, 1999. – 93 с.
4. Рыжик В.И. Алгебра и начала анализа. Контрольные измерительные материалы профильного уровня для 10-11 классов. Книга для учителя . – М.: Просвещение, 2009. – 187 с.
5. Рыжик В.И. Геометрия. Контрольные измерительные материалы профильного уровня для 10-11 классов. Книга для учителя . – М.: Просвещение, 2007. – 94 с.
6. Александров А.Д. Геометрия 7. Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений / А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. – М.: Просвещение, 2008. – 175 с.
7. Александров А.Д. О геометрии // М: Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 56-63.
8. Люблинская, И.Е., Рыжик В.И. Исследовательские сюжеты для среды "The Geometer's Sketchpad . – СПб: Изд. ЦПО "Информатизация образования", 2003. – 44 с.
9. Петриченко Д.Н, Поздняков С.Н., Рыжик В.И. Электронная рабочая тетрадь по геометрии для 9 класса // СПб: Компьютерные инструменты в образовании, 2006. – № 2. – С. 58-64.
10. Иванов С. Г., Рыжик В. И. Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси ординат // СПб: Компьютерные инструменты в школе, 2008.– №5. – С. 46-51.
11. Lyublinskaya I., Ryzhik V . Using Simbolinc Geomettry to Teach Secohdary School Mathematics Geometry Expressions Aktivities for Algebra 2 and Precalculus. Saltire . – Software Inc, Beaverton, OR, USA, 2008. – 93 с.
12. Lyublinsk/aya I., Ryzhik V. Funsch Dan Developing Geometry Proofs With Geometry Expressions . – tm Saltire Software Inc. Tigard, OR,USA, 2009. – 300 с.
13. Арнольд В.И. Что такое математика . – М.: МЦНМО, 2008. – 175 с.
14. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент . – М.: Наука, 1979. – 223 с.
15. Пойа Д. Математическое открытие . – М: Наука, 1970. – 450 с.
16. Блехман И.И. Механика и прикладная математика / А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1990. – 355 с.
17. Рыжик В.И. Геометрия и компьютер // СПб: Компьютерные инструменты в образовании, 2000. – № 6. – С. 7-11.
18. Рыжик В.И., Сотниченко Б.И. Этюд о прямой Симсона // М.: Квант, 2005. – № 1. – С. 7-14.
19. Успенский В.А. Апология математики . – СПб.: Амфора, 2009. – 553 с.
20. Люблинская И.Е., Рыжик В.И. От доказательства с использованием компьютера к компьютерному доказательству // СПб: Компьютерные инструменты в школе, 2009. – № 1. – С. 14-20.