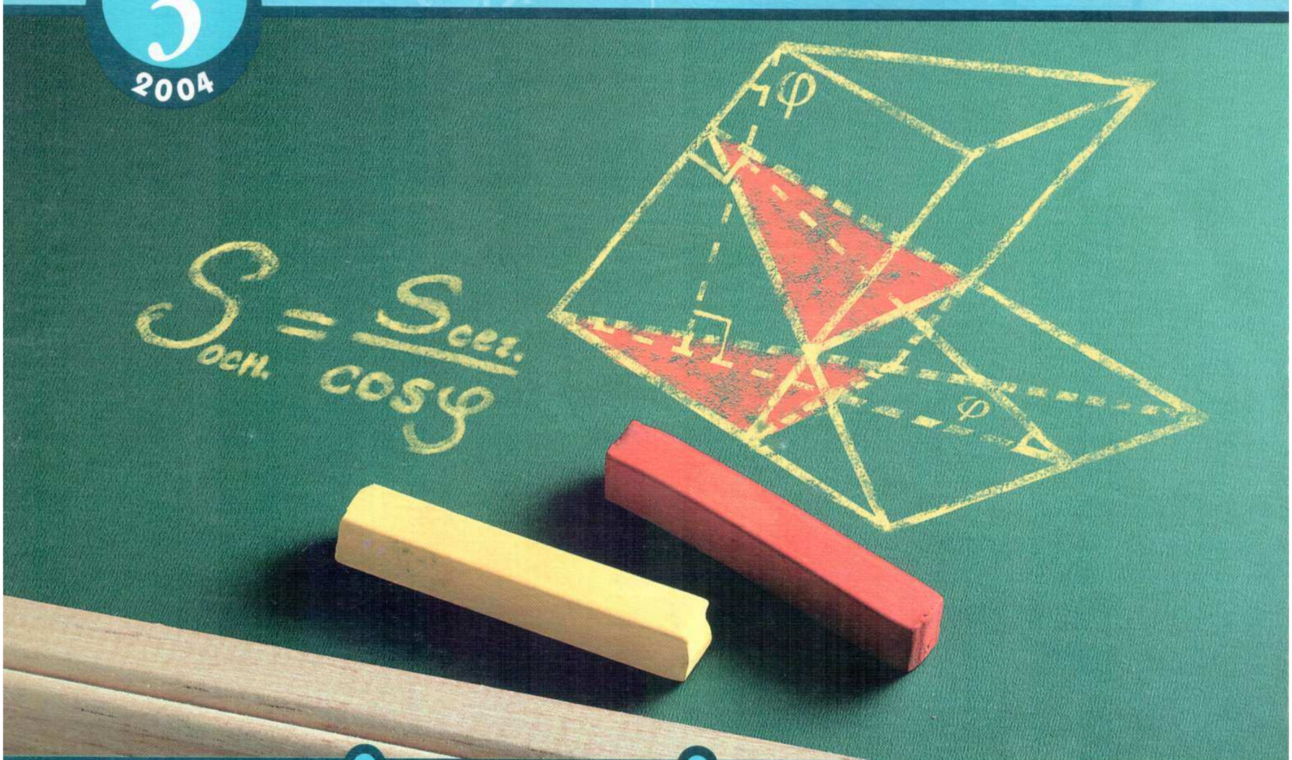
ISSN 0130-3358

научно-теоретический и методический журнал

МАТЕМАТИКА
в школе

3
2004



Инструкция по оформлению подготовки к ЕГЭ

Геометрия: задачи, повторение, экзамен

НОВЫЙ ПОДХОД К УСВОЕНИЮ ШКОЛЬНИКАМИ ПОНЯТИЙ ГЕОМЕТРИИ

Т.В.ШУБИНА (пос. Мурмаши Мурманской обл.)
Н.А.РЕЗНИК (Мурманск)

Плоские геометрические фигуры занимают одно из центральных мест в курсе геометрии. Традиционная схема их изучения

определение фигуры → формулировка и доказательство ее свойств и признаков → вывод формул для нахождения ее площади.

Мы предлагаем несколько иной подход в изучении данного материала, который используем в нашей работе уже более 7 лет. За основу принимаем экспериментальные материалы для учителя и ученика «Тригонометрия» [2] и пособия серии «Визуальная геометрия» [3].

Такие фигуры, как квадрат, прямоугольник и треугольник, известны детям из начальной школы. К началу обучения в V классе учащиеся уже четко владеют определениями этих фигур, умеют обозначать их вершины, знают свойство противоположных сторон прямоугольника, вычисляют площадь прямоугольника и квадрата по заданным длинам их сторон.

Поэтому в VIII классе можно ограничиться лишь повторением уже известных фактов, что и делает автор пособия [2]. Используя разбиение прямоугольника на равные прямоугольные треугольники, получают формулу для нахождения площади прямоугольного треугольника. Идея разбиения положена далее в основу получения формулы для нахождения площади остроугольного и тупоугольного треугольников. Заостряется внимание на равновеликих треугольниках, на их отличиях от равных треугольников. В конечном счете становится очевидной теорема о том, что медиана треугольника делит его на две равновеликие части. Теперь, когда треугольник хорошо изучен, будем обращаться к нему при изучении других фигур.

Вводя понятие трапеции, ее площади, мы параллельно знакомимся со средними линиями треугольника и трапеции. Затем изучаем параллелограмм и его свойства; еще раз обращаемся к прямоугольнику и квадрату, но здесь подробней останавливаемся на их свойствах; далее изучаем определение и свойства ромба. Получаем формулу для вычисления площади параллелограмма. Рассматриваем формулу вычисления площади ромба через его диагонали. Эта формула выводится с помощью формулы площади треугольника.

Что дает такая перестройка учебного материала? Несмотря на то что объем теоретического материала велик, знакомство с ним происходит с опорой на знания, полученные до VIII класса. Нет страха перед неизвестным. После изучения темы учащиеся имеют полное представление о четырехугольниках и нахождении их площадей.

Ниже мы предлагаем описание двухчасового урока по теме «Трапеция и ее площадь». Цель первой части урока – ввести понятие трапеции, познакомиться с видами трапеций, изучить их свойства.

Перед началом урока каждый из учеников получил комплект визуальных материалов, в котором можно работать простым карандашом, не боясь при этом допустить ошибки.

На первом этапе урока идет ознакомление с внешним видом трапеции. Для этого предлагаем в течение нескольких минут рассмотреть информационную страницу (рис. 1).

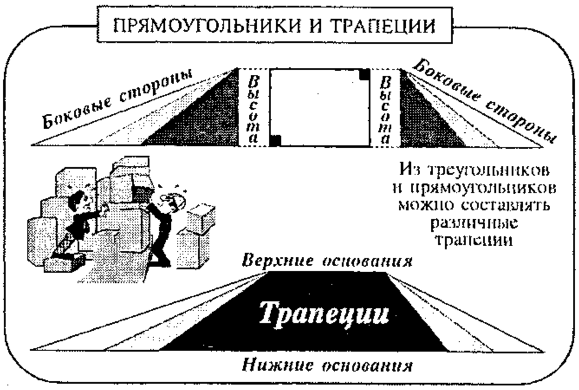


Рис. 1

Далее идет обсуждение рисунка. Для чего нарисованы человечки? Они что-то составляют, собирают. Так может и фигуру, названную еще непривычным для нас словом «трапеция», можно составить? Из чего? Ответ ребята находят на рисунках – из прямоугольника и треугольников.

Учитель задает следующий вопрос: «Какими должны быть треугольники, составляющие трапецию?» Выслушиваются и обсуждаются все мнения, выбирается один вариант – треугольники должны быть обязательно прямоугольными.

Ход дальнейшей беседы можно себе представить по вопросам учителя (ответы учащихся будем помещать в квадратных скобках):

«Как составляются треугольники и прямоугольник?» [Так, чтобы противоположные стороны прямоугольника совпадали с катетом каждого из треугольников.]

«А что вы знаете о противоположных сторонах прямоугольника? [Они параллельны.] Значит, и в данном четырехугольнике будут параллельные стороны? Сколько их? Как они называются? Как называются две другие стороны?»

А теперь учитель просит ребят дать полное определение трапеции с помощью рис. 1. Не сразу получается, но все же приходим к правильной формулировке: трапеция – это четырехугольник, имеющий одну пару параллельных сторон.

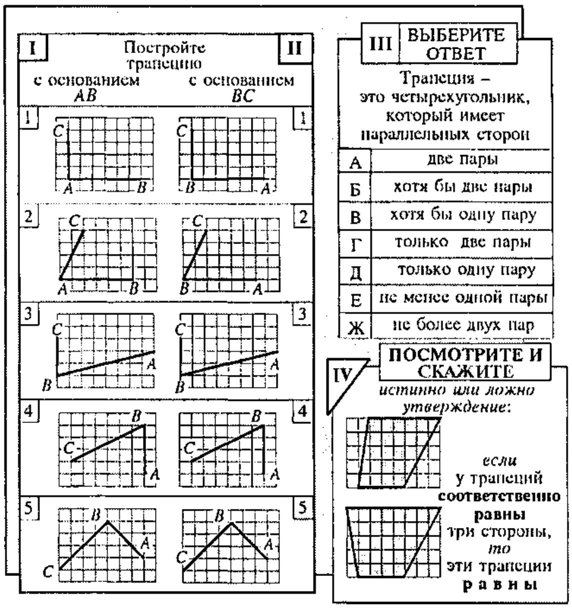


Рис. 2

Теперь без заминки класс выполняет задание, сформулированное в III блоке на рис. 2. Блок IV на том же рис. 2 тоже не вызвал затруднений, так как на рисунке фактически показан контрпример к заданному там же утверждению: две трапеции, у которых, соответственно равны одно из оснований и две боковые стороны, оказались совершенно очевидно неравными: одну из них можно целиком поместить в другой.

Следующий этап урока – построение трапеции по ее заданным элементам ребята выполняют задания из I и II блоков на рис. 2.

Приходится конструировать трапеции самых разных расположений и начертаний. Сначала (в пункте 1) учащимся навязывается построение прямоугольной трапеции. В пункте 2 появляется возможность построить равнобедренную трапецию. А вот в пункте 3 трапеция окажется «лежащей на боку». В пунктах 4 и 5 рисунки предусматривают построение таких трапеций, у которых одно из оснований оказывается непривычно маленьким... В общем получается так, что не учитель демонстрирует классу различные модели трапеций, а ученики «удивляют» учителя разными фигурами, носящими одно общее название – *трапеция.*

Ответы проверяем с помощью рисунков, выполненных на обратной стороне классной доски. Ребята работают в свободном темпе, учитель имеет возможность помочь слабым. Задания из II блока предлагаются на дом.

Переходим к рис. 3. Рассматриваем рисунок. Что увидели? Трапеции. Они чем-то отличаются друг от друга? Многие ребята заметили, что в зависимости от вида треугольника, расположенного слева в верхней части рис. 3, можно дать «параллельное» название трапеции. Так, если в построении трапеции участвует разносторонний треугольник, то трапецию можно назвать разносторонней. Если трапеция комбинируется из прямоугольника и прямоугольного треугольника, то ее называют прямоугольной. А если в построении трапеции приняли участие две равные «половинки» равнобедренного треугольника, то такую трапецию называют равнобедренной.

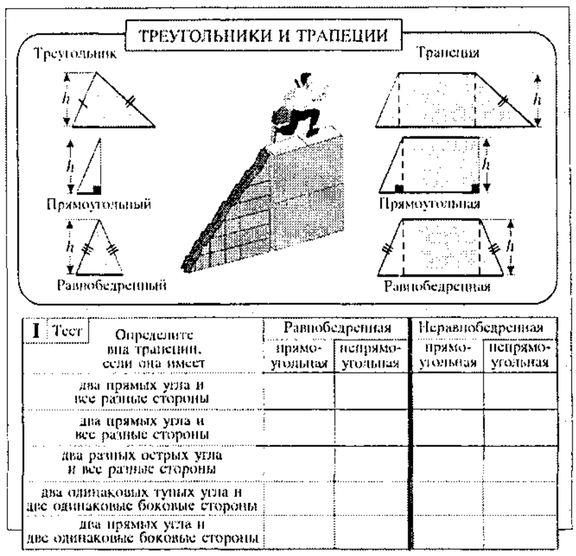


Рис. 3

Особое внимание учитель обращает на равнобедренную трапецию. Выясняется, есть ли у нее другие равные элементы помимо равенства боковых сторон. Вспоминаем признаки равенства прямоугольных треугольников и приходим к выводу: углы при каждом из оснований равнобедренной трапеции равны. Теперь предлагаем детям прямо на рисунке провести диагонали у этой трапеции и сравнить их длины. Почти мгновенно звучит ответ с места: «Они равны!» Для обоснования ответа приходится вспомнить признаки равенства треугольников.

Работа с тестом, который предложен на рис. 3, проходит попарно. И сразу же с места слышится недоуменный вопрос: «Разве может быть равнобедренная трапеция прямоугольной?» – Конечно, нет. Такой ответ дает весь класс, но учитель особо отмечает ученика, который сформулировал вопрос. Ведь он привлек всеобщее внимание к очень важной особенности изучаемой фигуры, а к тому же вспомнил сам и заставил вспомнить других о том, что длина гипотенузы всегда больше длины катета в одном и том же прямоугольном треугольнике. Услышав похвалу за догадку, ученики сообразили, как увеличить темп работы над тестом: надо искать ответы для равнобедренной трапеции только в столбике, который озаглавлен «непрямоугольная», а столбик под заголовком «прямоугольная» следует оставить пустым, поскольку равнобедренных прямоугольных трапеций не существует. А вот в случае неравнобедренной трапеции подходят оба варианта, т.е. она может быть как прямоугольной, так и непрямоугольной. Значит, во втором большом столбце теста следует заполнить *оба* маленьких столбика.

Перейдя к рис. 4, учащиеся сначала тренируются в определении вида трапеции, затем наступает черед практической работы, которая разделена на задания двух серий. В каждой из них сформулировано свое задание, а часть координатной плоскости, изображенная в каждом пункте, служит обоим заданиям. Пункты 1–3 учитель разбирает с учащимися в классе, пункт 4 остается для домашней работы.

В I серии заданий по рис. 4 учащиеся строят равнобедренную трапецию на координатной плоскости при известных ее трех вершинах. Во всех заданиях есть точки, в которых одна из координат равна нулю. Построение таких точек обычно вызывает у ребят трудности. Поэтому эти задания выполняются на доске, решение проверяется и комментируется всем классом.

Во II серии заданий по рис. 4 учащиеся указывают координаты четвертой найденной точки и устно пытаются разъяснить, почему заданные условия определяют только одну точку.

В конце первого урока предложена самостоятельная работа: решить задачи сюжета «Прямоугольные трапеции» (рис. 5). За время перемены учитель или его ассистенты проверяют и оценивают ответы школьников. Оценки за самостоятельную работу позволяют сделать вывод, что новый материал усвоен и можно продвигаться дальше.

На втором уроке необходимо вывести формулу для вычисления площади трапеции и закрепить полученные знания в процессе решения задач.

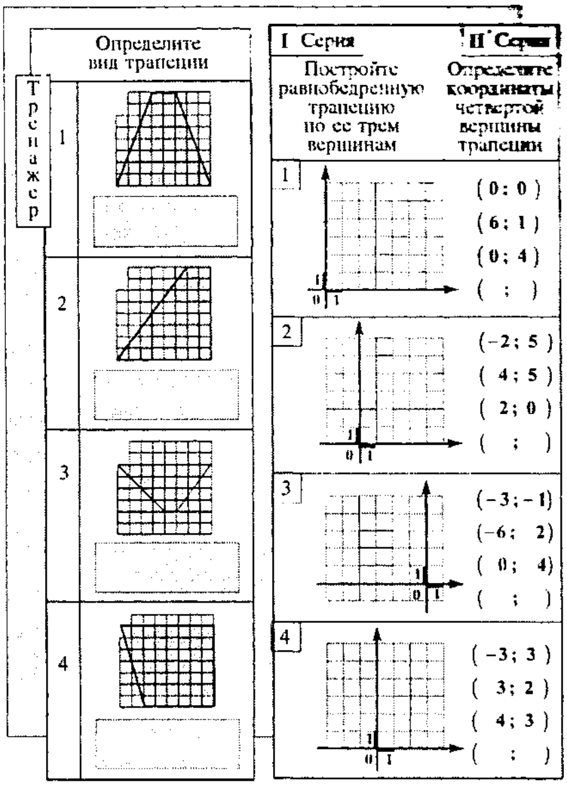


Рис. 4

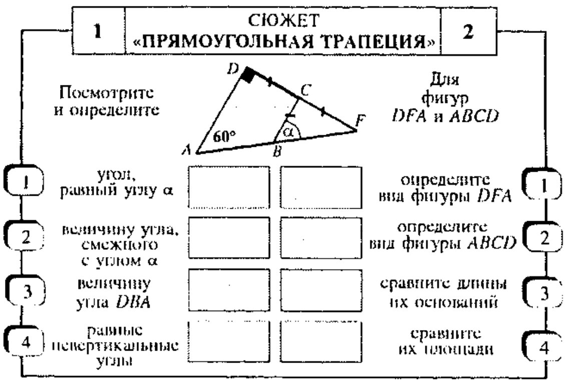


Рис. 5

Обращаемся к информационной странице «Трапеции и их площади» (рис. 6, вверху). Ищем пропущенные формулы, отвечая на вопрос: «Какая идея лежит в основе доказательства теоремы о площади трапеции?» Иллюстрация трапеции, разделенной на два прямоугольных треугольника и прямоугольник, помогает ребятам дать правильный ответ: «Доказательство основано на разбиении фигуры на части и на нахождение суммы площадей этих частей». В квадратиках в верхней части рис. 6 ребята записывают недостающие части формул для вычисления S_y, S_a, S_x.

Учитель задает следующий вопрос: «Достаточно ли элементов отмечено на чертеже?» Класс приходит к выводу, что для нахождения площади каждой из частей нужна высота – отмечаем ее на чертеже.

Ребята самостоятельно находят площадь каждой части трапеции и их сумму. При этом учащиеся вновь обращаются к верхним трапециям на рис. 6, так как многим непонятен смысл выведенной формулы. Рисунок помогает увидеть, что $a + y + x = b$ и $2a = a + a$. Итак, формула площади трапеции $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ получена. Учитель еще раз акцентирует внимание на том, что для получения площади трапеции необходимо знать длины оснований a и b и высоту h.

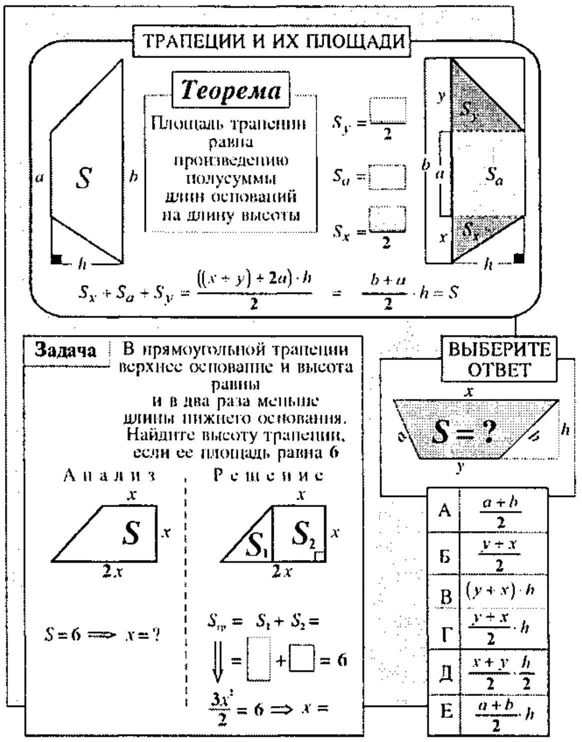


Рис. 6

Основная работа выполнена, формула получена, теперь нужно научиться применять ее при решении задач. Необходимая тренировка осуществляется при выполнении задания «Выберите ответ» (рис. 6, внизу справа). Затем наступает очередь решения задач. Первая задача сформулирована на рис. 6, внизу слева.

Здесь же в графе «Анализ» не только кратко записано условие, показано, какую величину следует обозначить через x, но и стрелкой намечена схема решения: от известной площади к вычислению неизвестной стороны. В графе «Решение» намеченная схема детализируется, в частности показывается, что формулу для вычисления площади трапеции можно найти, если выразить через x величины S_1 и S_2. Учащимся очень важно показать путь преобразований:

$$S_{\text{тр.}}=S_1+S_2=\frac{(2x-x)x}{2}+x^2=\frac{2x^2-x^2+2x^2}{2}=\frac{3x^2}{2}.$$

Только после того как получена формула $\frac{3x^2}{2}$, мы переходим к уравнению $\frac{3x^2}{2}=6$.

Затем учитель спрашивает: «Сколько корней имеет уравнение $6=\frac{3x^2}{2}$? Какой из них удовлетворяет условию задачи?» Таким образом осуществляется пропедевтика алгебраического материала, так как квадратные уравнения по нашему планированию в этот период еще не изучаются.

Тренажеры, которые представлены на рис. 7, направлены на отработку умения оперировать формулой площади трапеции. В I тренажере задание несложное, хотя пункт 4 вызвал у многих недоумение, учащиеся не могли понять, какие отрезки принимать за основания, а какой – за высоту? Пришлось еще раз вспомнить определение.

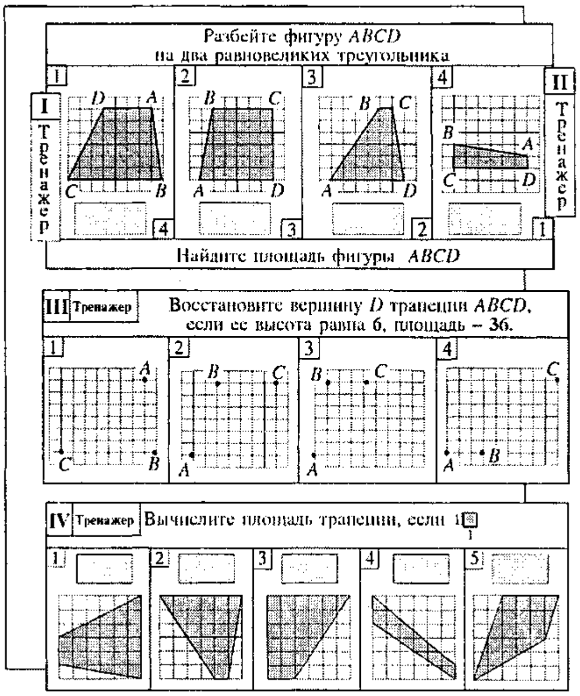


Рис. 7

Задания IV тренажера ребята выполняли на отдельных листочках. В квадратиках они записывали только ответ. Листочки сдавали учителю на проверку. После проверки ответов учитель выставлял предварительную оценку, которая корректировалась после ответов на вопросы по допущенным ошибкам. И опять в последнем задании (пункт 5) ребят ждал подвох: в данной трапеции посчитать по клеточкам высоту невозможно.

В конце занятия класс работал по III тренажеру. Но предварительно обсуждался такой вопрос: «Если заданы площадь и высота трапеции, что можно найти?» [Сумму оснований.] А если заданы три вершины, то две из них обязательно определят одно основание. Назовите, какое?»

Подведен итог. На описанных уроках учащиеся получили полное представление о новом виде четырехугольников – трапеции, узнали ее свойства и научились вычислять площадь. Каждый учащийся получил за урок две оценки. При этом все ученики класса оказались активными первооткрывателями новых знаний.

Литература

1. Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1995.

2. *Резник Н.А.* Тригонометрия. Экспериментальные материалы для учителя и ученика. Учеб. пособие для учащихся 8–9 кл. морского лицея и сред. школ. – В 2 ч. – Мурманск, 1993.

3. *Резник Н.А.* Визуальная геометрия «Треугольник и его элементы»: Сборник визуальных дидактических материалов для учителя и ученика (6–7 классы). – СПб: Изд-во «Информатизация образования», 2000.