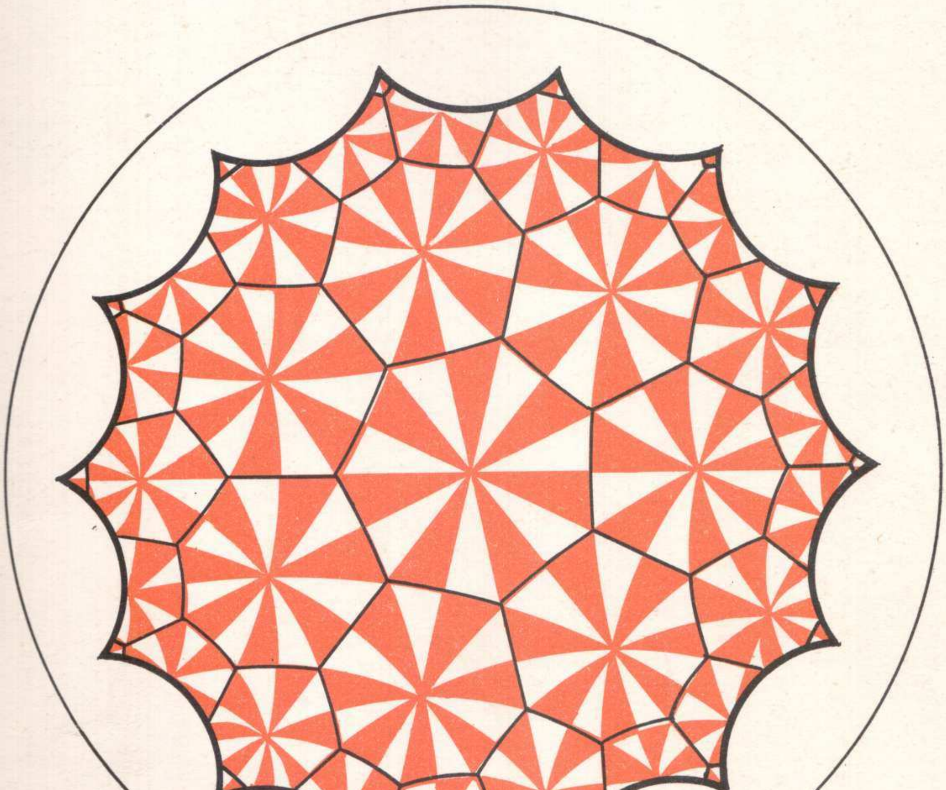
Резник Н.А.

ISSN 0130—9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

1

1991



ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ УРОКА

Развитие визуального мышления на уроках математики

М. И. Башмаков (Ленинград),
Н. А. Резник (Мурманск)

В процессе обучения математике происходит интеллектуальный рост школьников, проявляющийся в развитии и обогащении различных сторон его мышления, качеств и черт личности и характера. Развитая психологами типология мышления выделяет такие его виды как абстрактное и конкретное, речевое и эмоциональное, логическое и алгоритмическое и т. п. Широкое распространение получил термин «визуальное мышление» (зрительное, наглядное), означающее, как пишет Р. Арнхейм, «мышление посредством визуальных (зрительных) операций» ([11], с. 98). А. Р. Лурия, исследуя познавательные процессы, выделяет «ум, который работает с помощью зрения, умозрительно» ([12], с. 108).

Наша статья посвящена возможностям повышения качества преподавания математики с помощью целенаправленного обучения приемам визуального мышления. Приведем определение известного психолога В. П. Зинченко [5]: «Визуальное мышление — это человеческая деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определенную смысловую нагрузку и делающих знание видимым».

Каждый учитель использует на уроке наглядный материал — формулы и чертежи на доске, рисунки и схемы на экране, плакаты и таблицы на стенах, модели и образцы в руках у учеников. Первая цель учителя состоит в том, чтобы ученик смотрел на предъявляемые ему зрительные образы. Этой цели достичь легко. Вторая цель состоит в том, чтобы ученик смотрел и *видел* то, что заложено в этих образах. Культура зрительного восприятия требует такого же длительного и серьезного воспитания, как культура письма и речи. Как говорил Гельмгольц, «для того чтобы правильно видеть вещи, необходимо обучение» ([3], с. 223).

Вы написали на доске сложное алгебраическое выражение и предложили классу задание — упростить его. Ученики потянулись к ручкам. Остановите их. Вспомните, что первым шагом в каждом этапе познания является «живое созерцание».

Для того, чтобы сделать «живое созерцание» действенным, ученик должен научиться анализу визуальной информации. Какие шаги сопровождают такой анализ? Прежде всего, должно произойти осознание общей структуры предложенного изображения (это может быть формула, чертеж, график, схема и т. п.). При этом ученик стремится распознать некоторую эталонную, стандартную ситуацию, т. е. мысленно ответить на вопрос «на что», т. е. на применение каких знаний, какого правила нацелена поставленная перед ним задача. Приведем возможные примеры таких мысленных ответов: решить неравенство, используя метод интервалов; применить признак параллельности для построения сечения куба; провести исследование функции по графику; решить показательное уравнение.

Далее происходит расчленение, зрительный анализ информации, в котором важную роль играет узнавание, опознание отдельных ее фрагментов, отождествление одинаковых, сходных по форме или по смыслу ее элементов. Восстановим возможный ход мысли ученика при анализе задания «Решить уравнение $4^x + 3\cdot 2^{2x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} = 5$».

1. Уравнение включает в себя показательные функции — это показательное уравнение — опознание стандартной постановки задачи.

2. В уравнение входят показательные функции с основаниями 4; 2; $\frac{1}{2}$ — распознавание стандартного объекта.

3. Все слагаемые в левой части можно представить как показательные функции с одним и тем же основанием 2 — опознание одинаковых элементов.

4. Мне известно два стандартных типа показательных уравнений — $a^x = b$ и $a^{2x} + pa^x + q = 0$. Для их опознания надо сравнить показатели степеней, не обращая внимание на постоянные (еще один стандарт — отождествление a^{x+c} и ka^x)— целенаправленность дальнейшего анализа.

5. Все слагаемые имеют вид $k\cdot 2^{2x}$, т. е. представляют собой одинаковые степени одного и того же основания (теперь видно, что этим основанием можно взять как 2, так и 4) с точностью до постоянного множителя — отождествление одинаковых элементов.

6. После выкладок мы получим в левой части три подобных слагаемых типа $k\cdot 2^{2x}$ и, сложив их, придем к стандартному уравнению типа $A\cdot 2^{2x} = 5$, для решения которого есть стандартная формула.

Разумеется, порядок этих шагов может быть несколько иным, а отдельные из них — реализоваться мысленно.

Распознавание стандартной ситуации, стандарта, происходит как по постановке задачи, о чем было сказано ранее, так и по схеме «обобщение — специализация». Это может быть узнавание знакомой формулы в новых обозначениях, отождествление заданного числа со значением известной функции в некоторой точке, уяснение частного вида более общего знакомого понятия и т. д. Очень важно выработать у ученика умение не путать сходные по форме, но существенно различные по смыслу ситуации, чтобы он при появлении одной из них вспомнил о грозящей опасности. Например, чтобы предупредить частые ошибки при переписывании с доски ($a^3\sqrt{b}$ вместо $a\sqrt[3]{b}$, $\log 2x$ вместо $\log_2 x$, $3\sin x$ вместо $\sin 3x$ и т. п.), необходимо упражнять ученика, одновременно предъявляя ему эти выражения и приучая его осознанно разбираться, в чем их сходство и в чем различие.

Самым важным этапом визуального анализа является этап мысленного составления плана работы. Ученик должен определить порядок дальнейших действий, постараться в уме свернуть некоторые из хорошо знакомых ему операций, осуществить прогонку вариантов. Очень полезно обсуждать вслух, не производя вычислений, возможные варианты работы с прогнозированием того, что может получиться в результате каждого из них и с сопоставлением этого с исходной задачей.

Приведем примеры упражнений по различным материалам курса, чтобы пояснить предлагаемую нами методику организации «живого созерцания» на уроке математики.

1. Расставить символы умножения в выражении:

$$\frac{\operatorname{tg}(x+y)\,a^{xy}}{\sin x\cos y}\log_2(x-y).$$

2. Определить порядок вычислений на калькуляторе значений функции при заданном аргументе:

$$\sin^2\sqrt{\cos\frac{1}{\sqrt{\lg x}}}.$$

3. Найти одинаковые элементы и, осуществив их замену буквой a, записать выражение:

$$\frac{\lg^{-2}x+\sqrt{\lg x}}{\log_{10}x-\lg\frac{1}{x^{-1}}}.$$

4. Продолжить серию:

$f(x) = x^2 + \sin x + \frac{1}{x}$;

$f(2) = 2^2 + \sin 2 + \frac{1}{2}$;

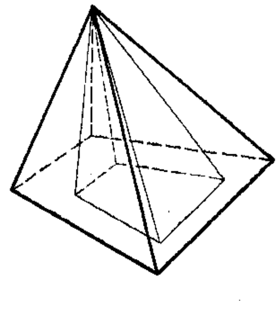


Рис. 1

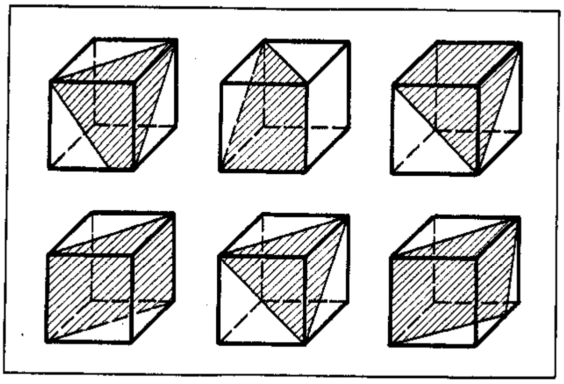
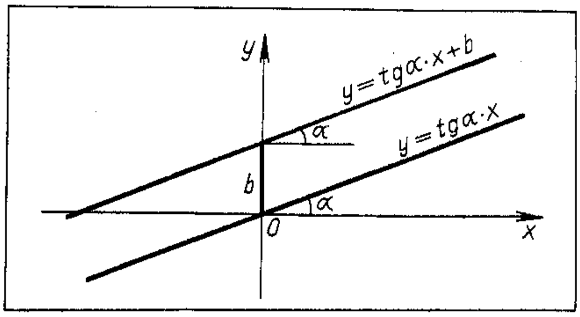


Рис. 2



ис. 3

$f(-x)=...;$
$f(3x+1)=...;$
$f(\cos x)=...$.

5. Определить, какие параметры двух изображенных пирамид являются одинаковыми (рис. 1).

6. Какие из заштрихованных фигур (рис. 2) не могут быть плоскими сечениями куба?

Таким образом, формируя последовательно все изложенные этапы «живого созерцания» учебной математической информации, мы не только используем природные свойства зрительного аппарата учащегося, но и формируем некоторые специальные особенности, которые у талантливых детей образуются зачастую непроизвольно, спонтанно. Образно можно сказать, что развиваемая нами методика призвана трансформировать визуальное мышление в продуктивное мышление, как его понимает Р. Грегори: «Нас привлекает взгляд на восприятие как на процесс, который реализуется в мозгу и подобен логическим процессам, например, таким, которые используются при получении и интерпретировании научных данных, при формировании различных гипотез, проверяемых затем путем спланированных наблюдений» ([4], с. 172).

Для того чтобы воспитать «математическое зрение», нужно постоянно заботиться об организации зрительной информации. От наивного использования наглядности как средства повышения эффективности урока мы должны перейти к формированию математических визуальных понятий, которые по своему объему, степени обобщенности не уступали бы привычным вербальным, словесным понятиям (рис. 3).

Важным средством организации восприятия информационного материала является цветовое оформление. Цвет как бы руководит «живым созерцанием» информации. Решая цветные примеры, учащиеся незаметно учатся отмечать ту или иную особенность информационного сообщения, которое таким образом (внешне непроизвольно) доходит до их сознания.

Следующим мощным средством организации учебной математической информации является обязательный заголовок к каждой ее «порции». Это не просто указание к действию (типа — найди, упрости, вычисли, отметь и т. д.). Заголовком должна быть фраза, в которой самым ясным образом определяется существо дела. Например: «Геометрический смысл интеграла от неотрицательной функции».

Мы разработали укрупненный визуальный способ подачи учебного материала в виде информационной схемы. Идея информационной схемы не нова. Многие учителя самостоятельно разрабатывают схемы и таблицы, используемые для оборудования кабинета математики. Имеется внешнее сходство нашей информационной схемы с опорными схемами В. Ф. Шаталова. Новыми элементами, характеризующими предлагаемые нами схемы, являются следующие.

1. Содержательная насыщенность. Схема может содержать теоретический материал большого раздела, соединяя сведения из разных тем. Ее можно многократно использовать при прохождении программы.

2. Соединение различных разобранных нами ранее средств, увеличивающих эффективность предъявления визуальной информации: разбиение схемы на 4—6 самостоятельных блоков, использование четкой словесной информации (заголовка, надписи), цветовые и графические выделения, перевод с наглядно-образного языка на язык формул.

3. Отделение главного от второстепенного. Нахождение зрительных образов, адекватно отражающих «главный случай»; перевод необходимых исключений из общих правил на периферию зрительного восприятия.

4. Динамичность при воспроизведении. Схема должна позволять ученику при ее воспроизведении менять те объекты схемы, которые изображают изучаемые переменные (числа,

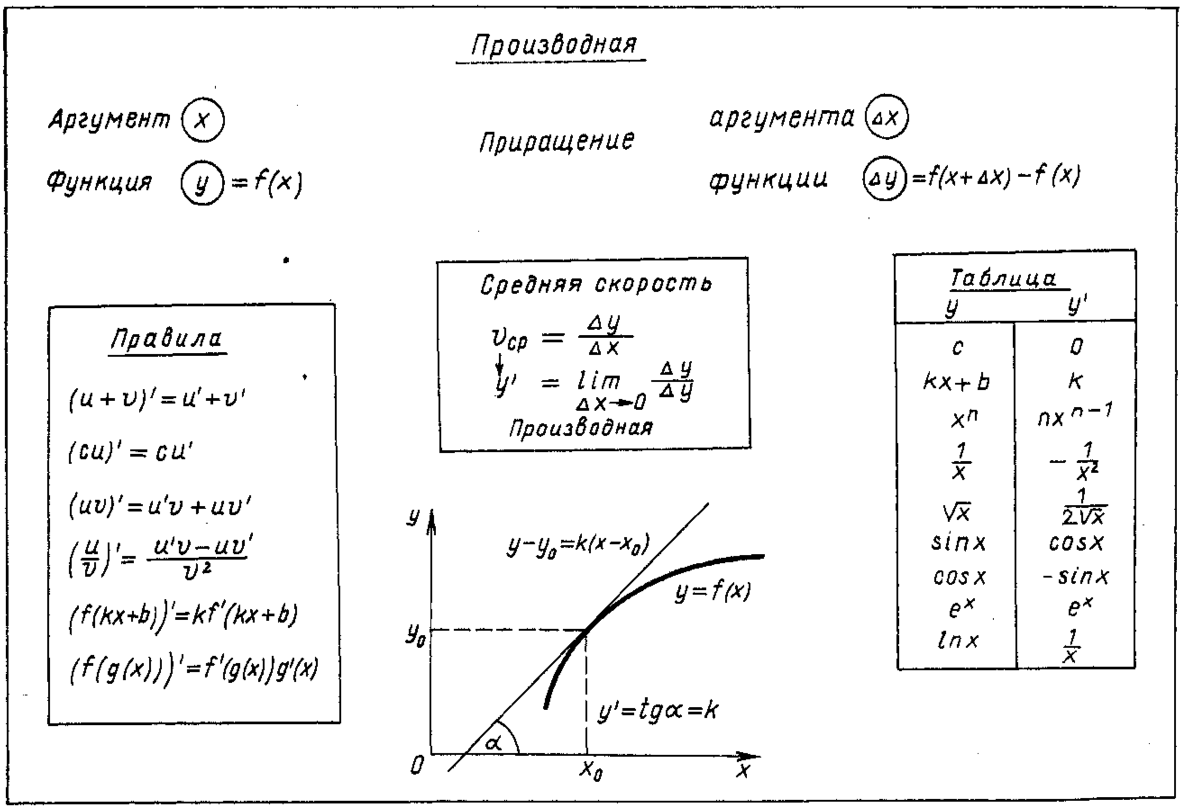


Рис. 4

функции, геометрические фигуры и т. п.), сохраняя ее общую структуру.

Примеры информационных схем представлены на рис. 4 и 5. Эти схемы должны быть раскрашены в 3—4 краски, что, к сожалению, невозможно показать в журнале.

Было бы неверным абсолютизировать роль визуального мышления при обучении математике. По нашему мнению, речь должна идти о том, чтобы целенаправленно использовать зрение в развитии мыслительных способностей учащихся, сделать зрительные образы не вспомогательным, а одним из основных методических средств. Большое значение при этом приобретает сочетание визуальных и вербальных приемов. Приведем примеры.

1. Чтение графика. Ученику предлагается заготовленный заранее график и задаются различные вопросы о поведении этой функции, о решении разнообразных связанных с ней уравнений и неравенств.

2. Построение графика функции с заданным набором свойств. Например, предлагается построить график функции, областью определения которой был бы отрезок [0; 2], а областью значений — [—2; 2]. Задавая участки монотонности, точки экстремума и другие условия, можно

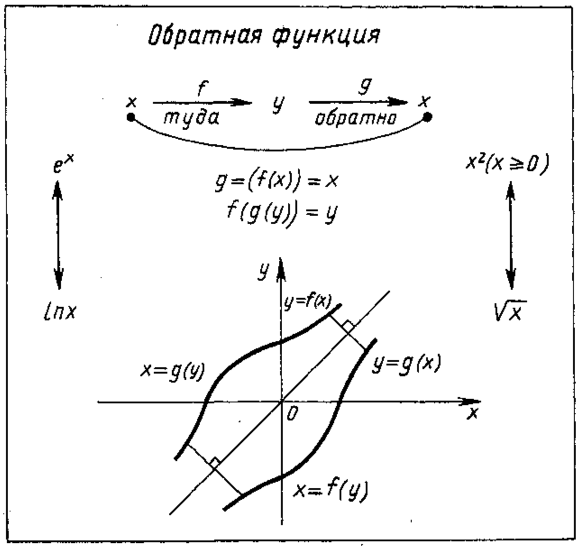


Рис. 5

получить богатый спектр полезных упражнений.

3. Визуализация связей.

а) Предлагается набор графиков (6—10), которые нужно разбить на пары «функция — производная».

б) Предлагается набор графиков функций одного типа (линейные, квадратичные, показательные и т. п.) и набор формул. Требуется сопоставить каждой функции ее формульное задание.

4. Достроение графиков. По заданной части графика достроить его так, чтобы выполнялось требуемое свойство (четность, периодичность, положительность и т. п.).

5. Словесное описание изображения. Предлагается достаточно сложная картинка и ставится задача: «Опишите, что Вы видите на этой картинке?» Картинка может содержать доказательство теоремы, введение нового понятия, геометрический вывод формулы и т. п. (в качестве примера см. рис. 6).

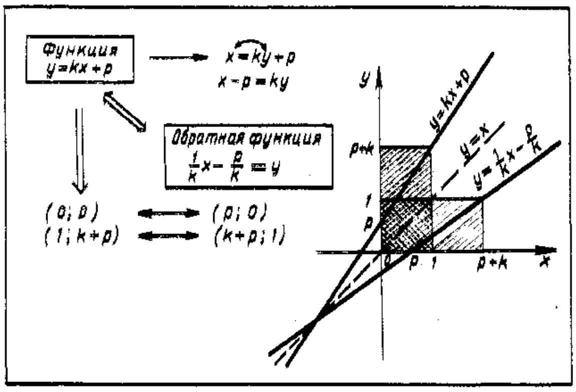


Рис. 6

Литература

1. **Арнхейм Р. Визуальное мышление** // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления. Изд-во МГУ, 1981.

2. **Лурия А. Р. Ум мнемониста** // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления. Изд-во МГУ, 1981.

3. **Грегори Р. Л. Глаз и мозг. Психология зрительного восприятия.** М.: Прогресс, 1970.

4. **Грегори Р. Разумный глаз** / Пер. с англ. А. И. Когана. М.: Мир, 1972.

5. **Зинченко В. П. Современные проблемы образования и воспитания** // Вопросы философии. 1973. № 11.