§3. Организация учебной математической информации

Визуальные образы не должны быть чем-то застывшим, фотографически фиксирующим изучаемые объекты. Внедрение таких образов в учебный процесс предполагает не только последовательное восстановление их, но при необходимости расчленение, сборку отдельных деталей в единое целое – новое образование. Этому служит умение выделить на визуальных стандартах важнейшие свойства понятий, отразить определенные операции над ними. Здесь налицо целесообразность активного использования различного рода визуальных дидактических материалов, которые мы разобрали достаточно полно и подробно.

3.1. Визуализация свойств математических понятий и операций над ними

Решение проблемы, связанной с восприятием визуальной информации, активным анализом ее элементов и структуры можно разрешить при помощи специальной организации учебного материала. Опишем одну из характерных ситуаций. После разбора положения о вынесении числа при задании вектора его координатами, предложен пример: “Пусть $(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;p)=\vec{a}$; $(\mathbf{1}\,;m\,;\mathbf{1})=\vec{b}$; $\vec{a}=\mathbf{3}\vec{b}$. Найти числа m и p”. Если перед этим подобная задача не была решена, то возникает ряд недоразумений. Оказывается, несмотря на всю простоту данных, учащиеся не воспринимают тот факт, что имеются одинаковые символы в соответствующих информационных сообщениях. Лишь немногие видят, что $(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;\,p)=\mathbf{3}\cdot(\mathbf{1}\,;m\,;\mathbf{1})$. Только что изложенное теоретическое положение остается для большинства вне поля их зрения. Им трудно сделать первый шаг: $(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;\,p)=(\mathbf{3}\cdot\mathbf{1}\,;\mathbf{3}\cdot m\,;\mathbf{3}\cdot\mathbf{1})$.

Выделим этот момент особо, поскольку для учащихся со слабо развитым математическим мышлением характерна “остановка” уже при начальном вводе в ситуацию. Более того “тормоз” того же типа препятствует их деятельности при каждом переходе от одного этапа преобразований к другому. Так, даже зная свойства координатной формы задания векторов, многие ученики не могут ими воспользоваться. Поэтому, на наш взгляд, задачей первостепенной важности является умение переоформлять и перестраивать символьную информацию. Подобный результат работы с нашим примером представлен в черно-белом варианте на рис. 51).

$$\boxed{\begin{gathered}(\mathbf{3};\mathbf{3};p) = \vec{a}; \qquad \vec{b} = (\mathbf{1};m;\mathbf{1}) \\ \vec{a} = \mathbf{3}\vec{b}\end{gathered}}$$

Рис. 51

В своих экспериментальных исследованиях мы не раз убеждались в том, что постоянное внимание к рисунку и интерпретации его данных снимает многие негативные явления предшествующего обучения. Целенаправленное оформление информационных данных можно считать неотъемлемым звеном в организации “живого созерцания” на школьных уроках. Образы, сопутствующие специальному распределению элементов информации (блоков, фрагментов) на плоскости листа или на дисплее, позволяют осознать определенную установку:

– найди одинаковые элементы и приравняй их,

– найди “родственные” по содержанию элементы и определи связь между ними и т.д.

Продемонстрируем приемы визуализации учебного математического текста, продолжая обсуждение раздела “Векторы на плоскости и в пространстве” [145-146]. Поскольку на соответствующие темы программой (ее инвариантной частью) отводится минимум допустимого времени, то особенно важно быстро сформировать умение (мысленно или письменно) восстанавливать основные стандарты:

а) противоположно направленные и сонаправленные (рис. 52-а,-б, слева) векторы;

б) сумма двух векторов (рис. 52-в, слева);

в) разность двух векторов (рис. 52-г, слева).

Учащиеся хорошо знают, что диагональ векторного параллелограмма, соединяющая концы составляющих его векторов, есть вектор их разности, однако направление этого вектора они обычно определяют с трудом. Здесь может помочь визуальная подсказка – стрелка вектора разности двух заданных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должна соприкасаться со стрелкой вектора-уменьшаемого (рис. 52, справа).

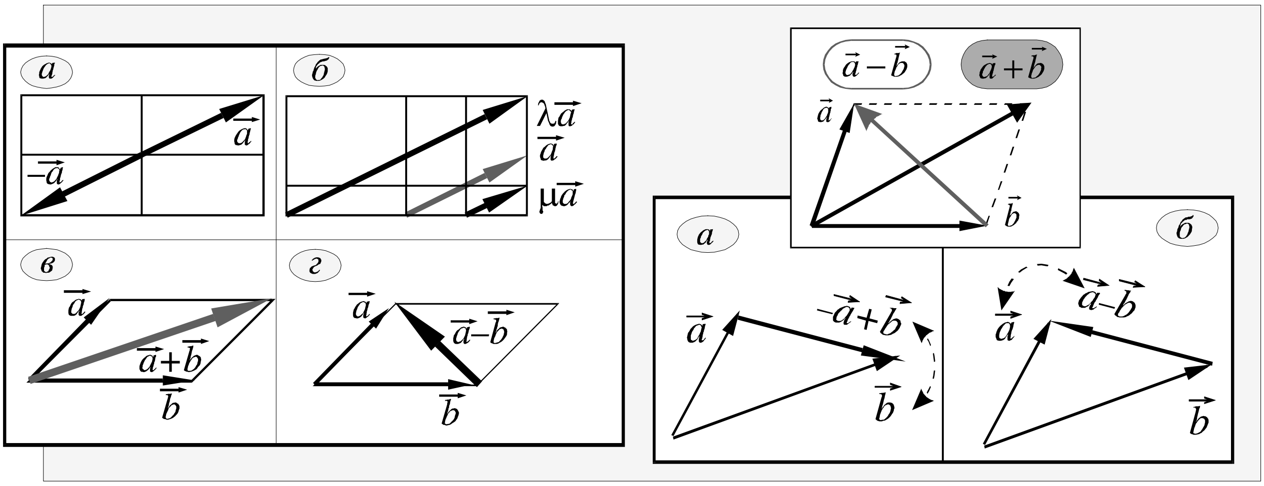

Рис. 52

Уже на первых порах изучения этой (как и всякой иной) темы необходимо сосредоточить внимание на формировании свободного переключения с одного языка предъявления информации на другие, что полезно постоянно поддерживать разнообразными задачами (см. приложение, с. 365-366, рис. 115-116). Все сведения о правилах изображений векторов и основных операций над ними можно сосредоточить в двух информационных схемах (см. приложение, с. 363-364, рис. 113-114). Первая представляет комплект визуальных образов, в каждом из которых акцент ставится на связь между словом и термином. Вторая схема концентрирует внимание учащегося на соотношениях между буквенными обозначениями и визуальными представлениями векторов (с указаниями их начала и конца) {145].

Визуальные стандарты помогут учащимся в решении многих геометрических задач. К сожалению, как правило, в учебных пособиях все здания, связанные с векторами, похожи друг на друга. Принцип формирования визуальных дидактических материалов позволяет разнообразить их формы представления и расширить вопросы содержания.

В теме “Векторы” каждое теоретическое положение и его применение хорошо “визуализируются”. Иллюстрируемые выше визуальные стандарты (рис. 51) помогут учащимся в решении задач, подобных следующей:

“Точка *O* является центром тяжести треугольника *ABC*. Доказать, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{\mathbf{0}}$”.

Анализ. Образ центра тяжести треугольника дан на рис. 53-а.

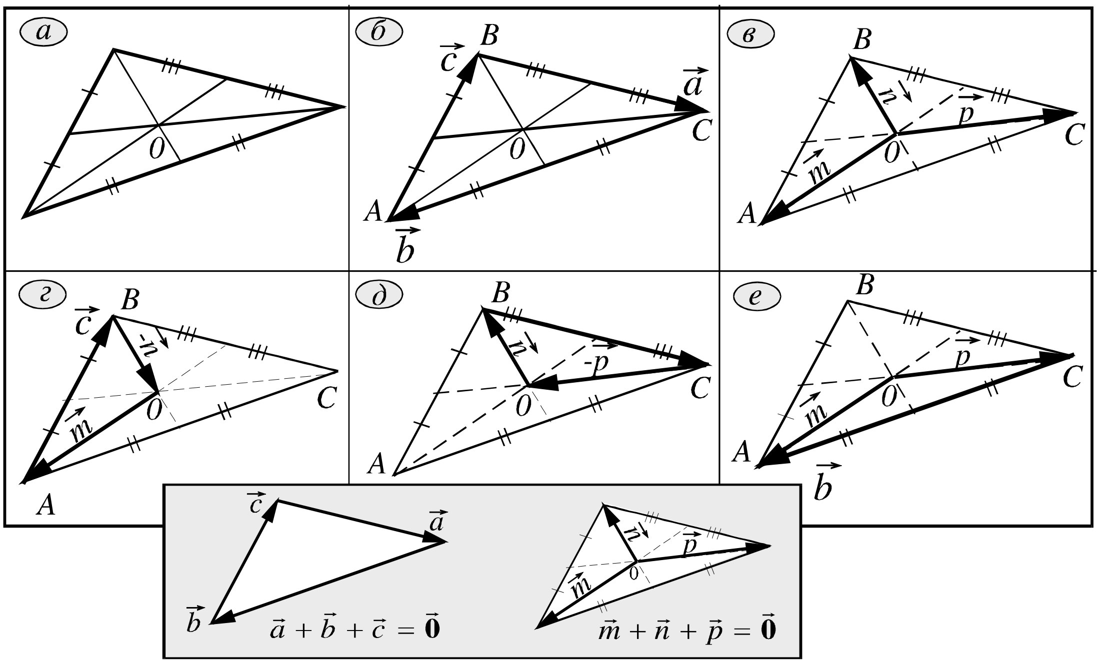

Рис. 53

Решение. Примем (рис. 9.08.2-3): $\overrightarrow{AB} = \vec{c},\ \overrightarrow{BC} = \vec{a},\ \overrightarrow{CA} = \vec{b},$
$\overrightarrow{OA} = \vec{m},\ \overrightarrow{OB} = \vec{n},\ \overrightarrow{OC} = \vec{p}.$

Решение. Примем (рис.53-б,-в): $\overrightarrow{AB} = \vec{c},\ \overrightarrow{BC} = \vec{a},\ \overrightarrow{CA} = \vec{b},$
$\overrightarrow{OA} = \vec{m},\ \overrightarrow{OB} = \vec{n},\ \overrightarrow{OC} = \vec{p}.$

Используя стандарты, имеем: $\vec{m} = \vec{c} - \vec{n},\ \vec{n} = \vec{a} - \vec{p},\ \vec{p} = \vec{b} - \vec{m}$ (рис. 53-г,-д,-е).

Произведя несложные вычисления, мы от известного образа (рис. 53, внизу слева) перейдем к визуальному обобщению – “векторному свойству” центра тяжести треугольника (рис. 53, внизу справа).

3.2. Геометрическая иллюстрация связей между различными понятиями

Под визуализацией (геометрической интерпретацией) связей между двумя различными математическими понятиями мы понимаем сопоставление элементов одного визуального стандарта с элементами другого. Комплекты таких стандартов предназначены для зрительного анализа возможных связей между изображаемыми объектами. Каждая “пара” должна позволять констатировать, а в дальнейшем и восстанавливать искомые характеристики поведения каждого изучаемого математического понятия. Рассмотрим три примера.

Функция и ее производная

Обсудим фрагмент информационной схемы “Графики элементарных функций и их производных” (см. приложение, с. 359, рис. 109). “Отождествляя” понятие производной с углом наклона касательной, можно, имея семейство таких касательных, заданных в нескольких точках достаточно малого интервала, восстановить график этой функции и наоборот. Схема позволяет визуально установить отношение “функция-производная”, например, для квадратичной функции вида “$x^2 + k$”.

Очевидно: каждому столбцу парабол соответствует только один визуальный образ линейной зависимости. Отсюда

<u>вывод</u>:

$\left(x^2 + k\right) = 2x$ – сдвиг графика исходной функции x^2 по горизонтали не изменяет визуального результата ее дифференцирования;

<u>и предвидение</u>:

$\left[(x+k)^2\right]' = 2(x+k)$ – сдвиг графика исходной функции x^2 по горизонтали порождает производную, отличающуюся от случая $\left(x^2\right)' = 2x$ на параметр $2k$.

Аналогично и для остальных пар графиков, изображенных на упомянутой схеме. При исследовании выявляются важные признаки поведения функции и ее производной “в малом” (для тех участков, на которых кусочки графиков по своей конфигурации совпадают с известными). Одновременно выясняется, что:

а) в точках, где функция $f(x)$ имеет экстремум, ее производная численно равна нулю ($f'(x) = \mathbf{0}$);

б) в точках перегиба функции $f(x)$ производная $f'(x)$ имеет экстремум;

в) при изменении x от меньших значений к большим из интервала выпуклости заданной функции $f(x)$ производная $f'(x)$ убывает, а на интервалах вогнутости – возрастает;

г) наклонные асимптоты графика функции $f(x)$ соответствуют горизонтальным асимптотам графика производной $f'(x)$ (см. приложение с. 360, рис. 110, вверху).

Проведя исследования, учащийся может выполнить требование задачи № 2.14 [из книги 13]. А именно: алгоритм построения графика скорости по графику пути. Подобным образом мы помогаем учащимся перейти от знакомства с отдельными, локальными фактами учебной теории к категориальным обобщениям. Способность “выполнять перекодированное по категориям, вместо того, чтобы хранить миллиарды случаев, когда встречалось то или иное явление, – очевидное преимущество человеческой памяти” [82, с. 79].

Все представленные в приложении на рис. 110 (вверху) связи функции и ее производной позволят учащимся, не обращаясь к формульным выкладкам, решать задачи учебника: разбить графики функций на пары “функция и ее производная” (см. приложение с. 360, рис. 110, внизу) [11, с.110, № 2.34]).

Покажем, по каким ориентирам учащийся может найти правильные ответы. Пара графиков (-а) и (-б) обладает характерным отличием: наклонная асимптота графика функции переходит в горизонтальную асимптоту графика производной. Пара графиков (-в) и (-г) легко определяется по стандартным образам и т.д.

Экспонента и логарифм

Для учащихся значительную трудность представляют условия взаимосвязи показательных и логарифмических неравенств. Несмотря на то, что переход от экспоненты к логарифму (например, при основании $a>1$) достаточно легко организовывается цепочкой формул: $a^x > y \;\Leftrightarrow\; \mathbf{log}_a a^x > \mathbf{log}_a y \;\Leftrightarrow\; x = \mathbf{log}_a y$,полезно показать, как этот результат выглядит “в натуре” (см. приложение, с. 372, рис. 122, внизу).

В данной работе акцент на объединение визуальных образов функций ставится не единожды. То же следует делать и в процессе обучения. По словам Колерса “в процессе формирования обобщенных образов более важную роль играет предъявление <u>множества разных</u>, но имеющих нечто общее образцов, чем многократное повторение идентичных ... ” [82, с.75]. К сожалению, не многие учителя осознают это важное обстоятельство – в ходе урока тетради учеников заполняются “батареями” однообразных примеров. При таком подходе продуктивность урока значительно снижается.

По нашему глубокому убеждению, формирование навыков и умений зависит не столько от количества выполненных упражнений, сколько от их качества и разнообразия.

Приведем пример пары информационных схем, связанных между собой принципом структурной общности. Левые блоки схем “Обратимость линейной функции” и “Построение экспоненты и логарифма” (рис. 54) показывают: для быстрого построения графика функции $y = kx + p$ $\left(y = a^x \right)$ можно так выбирать значения абсцисс и ординат “контрольных” точек, чтобы естественным образом использовались значения параметров k и p при $x = \mathbf{0},\ x = \mathbf{1}$ (основания a при $x = \mathbf{0},\ x = \mathbf{1}$ и $x = -\mathbf{1}$).

Эти блоки дают визуальную инструкцию для построения формул обратных функций и их “контрольных” точек:

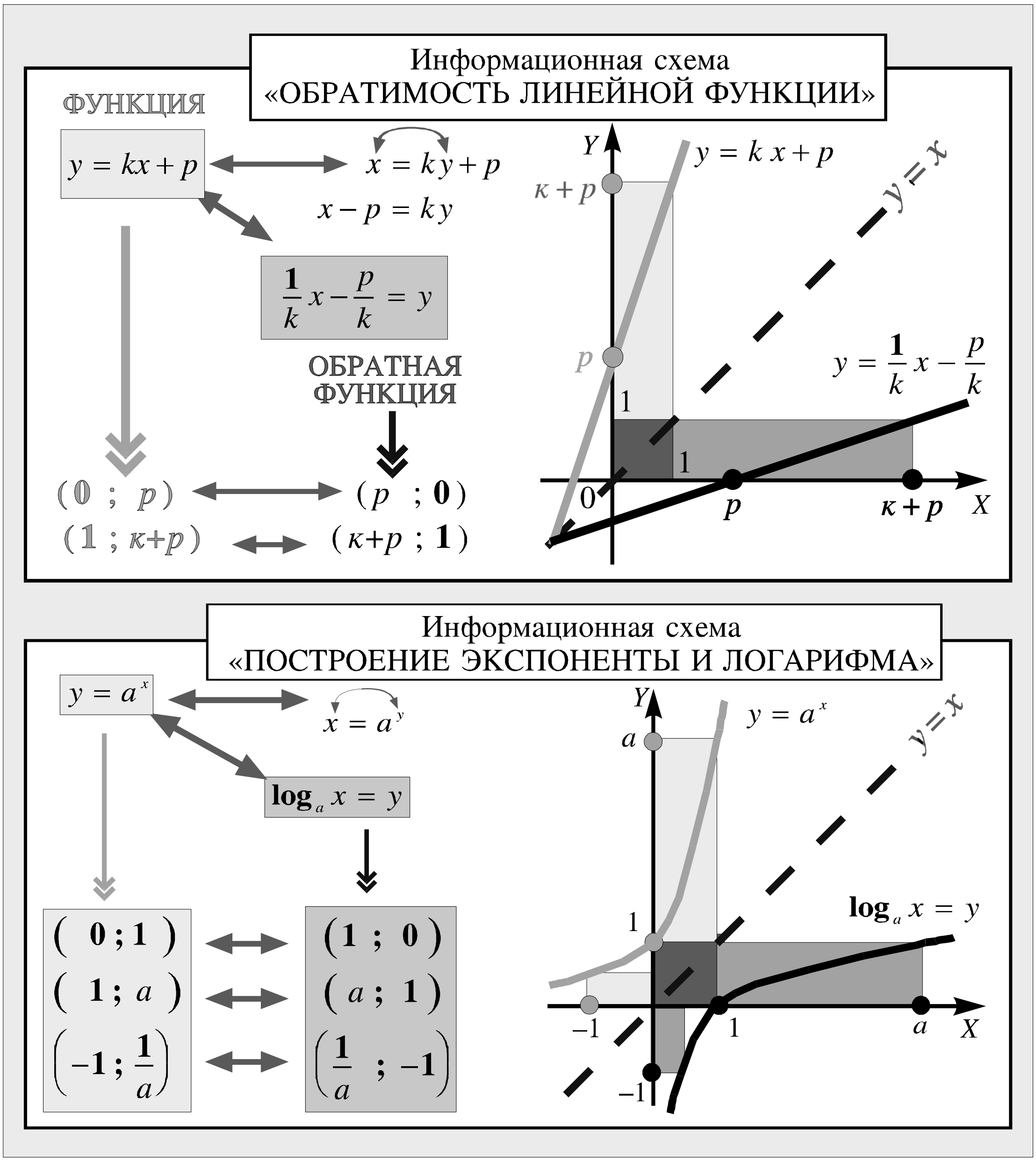

Рис. 54

а) в исходном задании поменять местами переменные,

б) выразить y через x,

в) осуществить перестановку координат “контрольных” точек.

Принцип отображения графика функции относительно биссектрисы I-го координатного угла визуально реализует связи между обратными функциями (графические блоки).

Изучение свойств линейной функции в общеобразовательной школе начинается задолго до ее окончания. Постепенно накапливаются знания, последовательно осуществляется знакомство с понятием обратимости и уже “на выходе” учащиеся получают информацию об экспоненте и логарифме. “Сквозная линия”, представленная различными параллельными блоками, позволяет визуально обобщить понятие обратимости, разобраться в его существе и масштабах применения.

Алгоритмическая направленность схемы “Обратимость линейной функции” позволяет ***умо-зрительно*** определить порядок действий необходимого поиска. Вторая схема (“Построение экспоненты и логарифма”) как бы “дублирует” процесс, дает возможность еще раз применить изученный ранее алгоритм в новой ситуации. Сопоставление этих справочников помогает образованию связей, побуждающих ученика искать подобные аналогии в иных ситуациях.

Мы так много внимания уделяем различным по характеру и виду визуальным образам одного и того же математического “явления” потому, что такой подход “выдвигает на передний план творческую, символическую, рациональную активность сознания, осуществляющего определенные действия, а не просто пассивное детектирование” [82, с. 75].

В результате изучения (исследования) различных визуальных “парных портретов” экспоненты и логарифма можно придти к формуле-схеме, которая представляет собой оптимальное свертывание (см. приложение, с. 372, рис. 122, внизу, справа).

Интеграл – площадь криволинейной трапеции

При решении задач, связанных с нахождением площадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения, основой является визуальный образ интеграла от неотрицательной функции (рис. 54). Однако для успешного получения результатов этого оказывается недостаточно. Данный образ нуждается в расширении, например, информационной схемой, аналогичной приведенной на рис. 55.

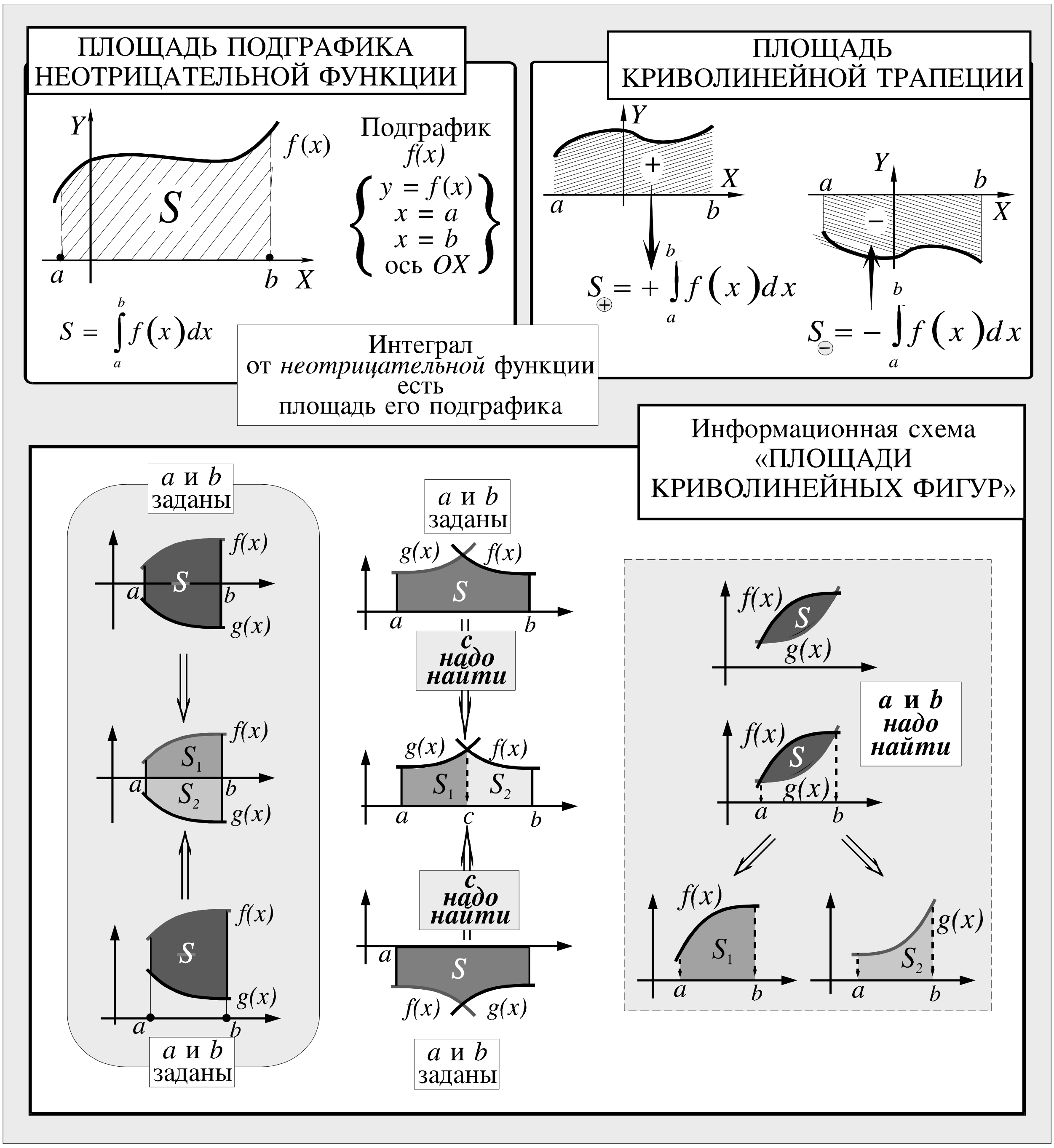

Рис. 55

Блоки схемы «Площади криволинейных фигур, образованных графиками функций» показывают, что в случаях (-а) и (-б) площади криволинейных трапеций, ограниченных графиками f и g на промежутке $[a;b]$ равны сумме площадей подграфиков этих функций, а в случае (-в) – их разности.

Обратим внимание на вербальные инструкции этой схемы.

В столбике справа имеется указание: a и b надо найти. Эта рекомендация нуждается в пояснении. Графики функции f и g имеют “общие места” – точки их пересечения. Перевод этого факта в формулу дает: $f(x) = g(x)$. Данное равенство и определяет искомые точки a и b, поскольку именно для них: $f(a) = g(a)$ и $f(b) = g(b)$.

Блоки схемы «Площади криволинейных фигур» (рис. 9.19) показывают, что в случаях (1) и (2) площади криволинейных трапеций, ограниченных графиками f и g на промежутке $[a; b]$ равны сумме площадей подграфиков этих функций, а в случае (3) – их разности. Однако схема будет успешно работать, если учащиеся предварительно усвоят визуальный образ самого подграфика функции, который можно ввести на одной или двух страницах информационной тетради (рис. 55, вверху).

3.3. Анализ структуры математической таблицы

Стены классов школы обычно заполнены различными таблицами. Предполагается, что учащийся будет применять их в своей самостоятельной работе. Тем не менее, картина такова: в поисках ответа ученики предпочитают заглядывать в учебники или тетради или же применить заранее изготовленную шпаргалку.

Особую трудность в быстром и оперативном использовании представляют таблицы, предлагающие набор формул или графиков. Эти таблицы составляются как справочный материала и содержат большой запас сведений теоретического характера. Распознавание объектов, закономерностей связей между ними затруднено из-за обилия информации, сосредоточенной в столбцах и строках, не всегда удобной для восприятия структурой и т.п.

Главным отличием описываемых информационных схем от привычных стандартных плакатов и таблиц является их “подвижность”. Это позволяет постепенно увеличивать объем информации и разнообразить средства представления, вносить необходимые акценты, сосредоточивать внимание на том существенном, что составляет “зерно” обучения в соответствующий период обучения.

Учитель, изготавливая конкретную схему, ориентирует ее на возможности своих учеников, продумывая одновременно способы объяснения ее содержания. Ученики, занимаясь “производством законной шпаргалки”, анализируют и обобщают соответствующий материал, обращаясь к ней всякий раз, когда в этом возникнет необходимость. В приложении приведены примеры полезных упражнений, направленных на формирование навыка их составления (см. приложение, с. 365, рис. 115).

Американские исследователи Колерс и Иден выделяют следующий аспект проблемы распознавания образов: « ... даже при распознавании предметов требуется формулировка некоей характеризующей их абстрактной структуры, а это уже и есть формулировка соотношений между отдельными частями. Может быть, причина того, что в автоматическом распознавании образов достигнуто пока столь мало, заключается в том, что «распознавание» базировалось на идентификации шаблонов (предметов), а не принципов, определяющих их структуру, и контекстов, в которых они предъявляются» [83].

Может быть действие таблиц, висящих на стенах класса, не столь велико из-за того, что мы предлагаем ученикам просто использовать их данные. Гораздо важнее научить их отделять главное от второстепенного, обогащая мышление новыми свойствами – способностью к анализу структуры и элементов справочного материала. Продемонстрируем на конкретном примере один из возможных способов повышения коэффициента полезного действия таблиц.

Поставим задачу: используя свойство симметричности хорошо известной таблицы «Выражение любой тригонометрической функции через остальные», восстановить недостающую в ней информацию (рис. 56).

Для начала естественно заполнить данные одной из диагоналей таблицы.

Наиболее легким для реализации результатов «живого созерцания» является квадрант правого нижнего угла.

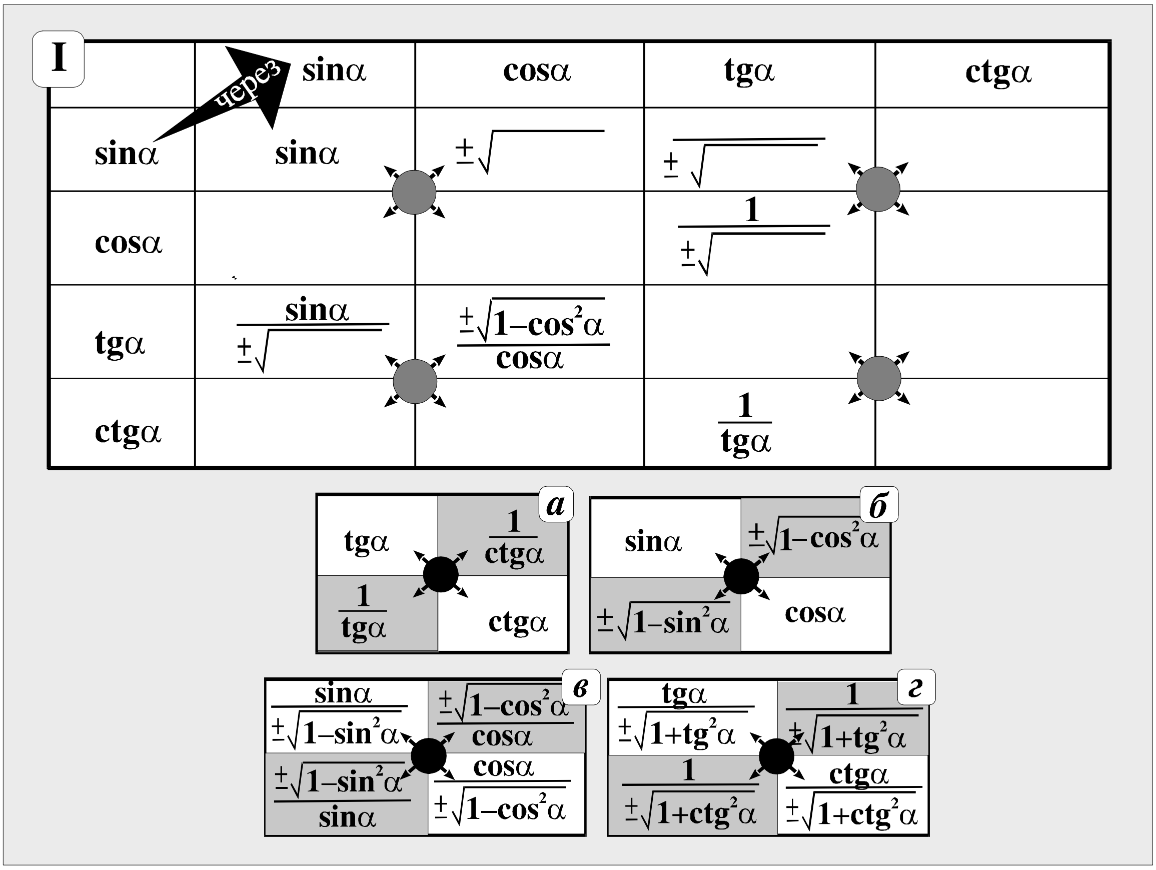

Рис. 56

Выявив один из его элементов, без труда приходим ко второму (рис. 56-а).

Следующий по степени трудности – верхний левый квадрант – также заполняется без особых усилий (рис. 56-б).

Ориентиры дают обнаруженные ранее свойства данной таблицы:

а) все клетки по горизонтали в качестве определяющего элемента имеют формулу (аналитическое задание) одной из тригонометрических функций;

б) клетки, находящиеся на противоположных концах диагоналей квадрантов, совпадают по структуре выражений, находящихся в них.

Наиболее сложный нижний левый квадрант заполняется тогда, когда характерные свойства данной таблицы восприняты визуально и неоднократно применены на практике (рис. 56-г). Представленный процесс в рамках действий «специализация – обобщение» выглядит следующим образом:

– от специализации содержания и структуры одного из квадрантов к обнаружению общих закономерностей всей таблицы;

– от свойств таблицы (в целом) к выявлению содержания каждого из квадрантов (в отдельности).

В приложении на рис. 196 предложено еще одно методическое средство, обеспечивающее закрепление навыков взаимообратных мыслительных действий – объединенная таблица «Производная – первообразная» (см. приложение, с. 446). Алгоритм заложен в двух верхних и нижних полосах таблицы. Движение от заданной функции по горизонтали влево дает результат ее дифференцирования, движение вправо – результат интегрирования.

В завершение отметим словами Когана следующее: «Секрет того, что мы видим предметы, там, где они есть, и такими, какие они есть, заключается в двух вещах: способности глаза сообщать мозгу о том, как вещи выглядят, и способности мозга обогащать зрительный образ сведениями, приобретенными в опыте» [81].

3.4. Формирование стандарта на этапе введения понятия

Перейдем к описанию процесса введения нового понятия с помощью информационной тетради, опираясь на тезис о полезности предварительного ввода визуального образа до формирования точной, строгой математической дефиниции. Каждый из отдельных этапов накопления необходимого визуального опыта подразумевает некий “промежуточный” стандарт с тем, чтобы в итоге сформировался единый визуально-логический образ.

Покажем, как приемы визуализации математических объектов, их свойств и связей между ними применять при введении нового понятия. Основной целью данного процесса является “сумма” действий, при которых учащийся, говоря словами Шехтера, “должен не только логическими средствами, но и в результате прямых наблюдений ... увидеть содержание ... основ математических понятий” [198, с. 264]. Продемонстрируем эти соображения на конкретном примере информационной тетради “Монотонность поведения функции на заданном отрезке”.

Этап I. *Визуализация термина и символа*

Каждая страница тетради “Монотонность поведения функции на заданном отрезке” начинается с заголовка, адекватно отражающего ее содержание.

Визуальное введение термина (рис. 56).

О наглядном назначении символов типа “$\uparrow$” мы уже говорили (с. 45). Полезно предложить учащимся самостоятельно заполнить правую часть страницы, привести простые примеры с числовыми данными, осуществить их интерпретацию на числовых осях.

Геометрическая интерпретация символа (рис. 57).

Полезны также упражнения типа: “По рис. 57 (слева) определите поведение функции $f(x)$, если убывает от x_2 до x_1”. Основная трудность кроется в том, что необходимо по характеру и границам изменения независимой переменной x сделать вывод о поведении зависимой переменной $f(x)$.

При первом знакомстве такая работа для глаз и мысли сложна – наблюдения осуществляются в медленном темпе. Однако двух-трех “экспериментов” достаточно, чтобы механизм опознания сложился и позволил анализировать переходы в более короткие сроки.

Этап 2. *Переход к определению понятия*

Построение определения понятия (рис. 58).

Наиболее продуктивным, на наш взгляд, будет не директивное введение такого определения, а творческий процесс, в котором ученики являются его “создателями”. К данной странице неявным образом прилагаются следующие задания “Составьте определение функции

а) убывающей на заданном промежутке $[a;b]$,

б) возрастающей на интервале $[a;b]$”.

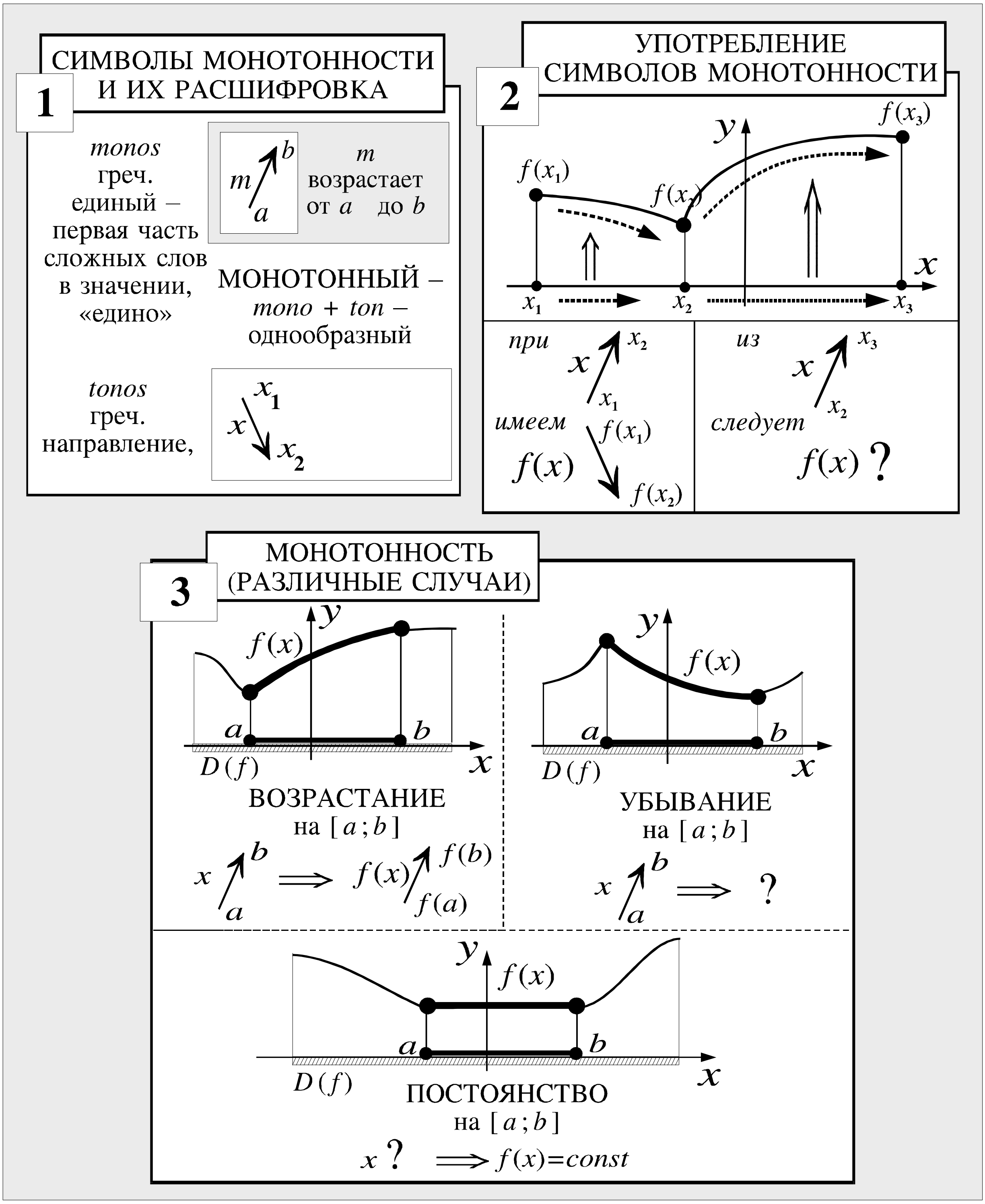

Рис. 57

Получив предварительный визуальный опыт (термин – изображение – формула), учащийся должен разобраться в строгом определении понятия. Здесь налицо еще один, чисто психологический, аспект. При введении нового объекта (до установления дефиниции) учащийся может не бояться недостаточно точно и “складно” описывать его существенные особенности.

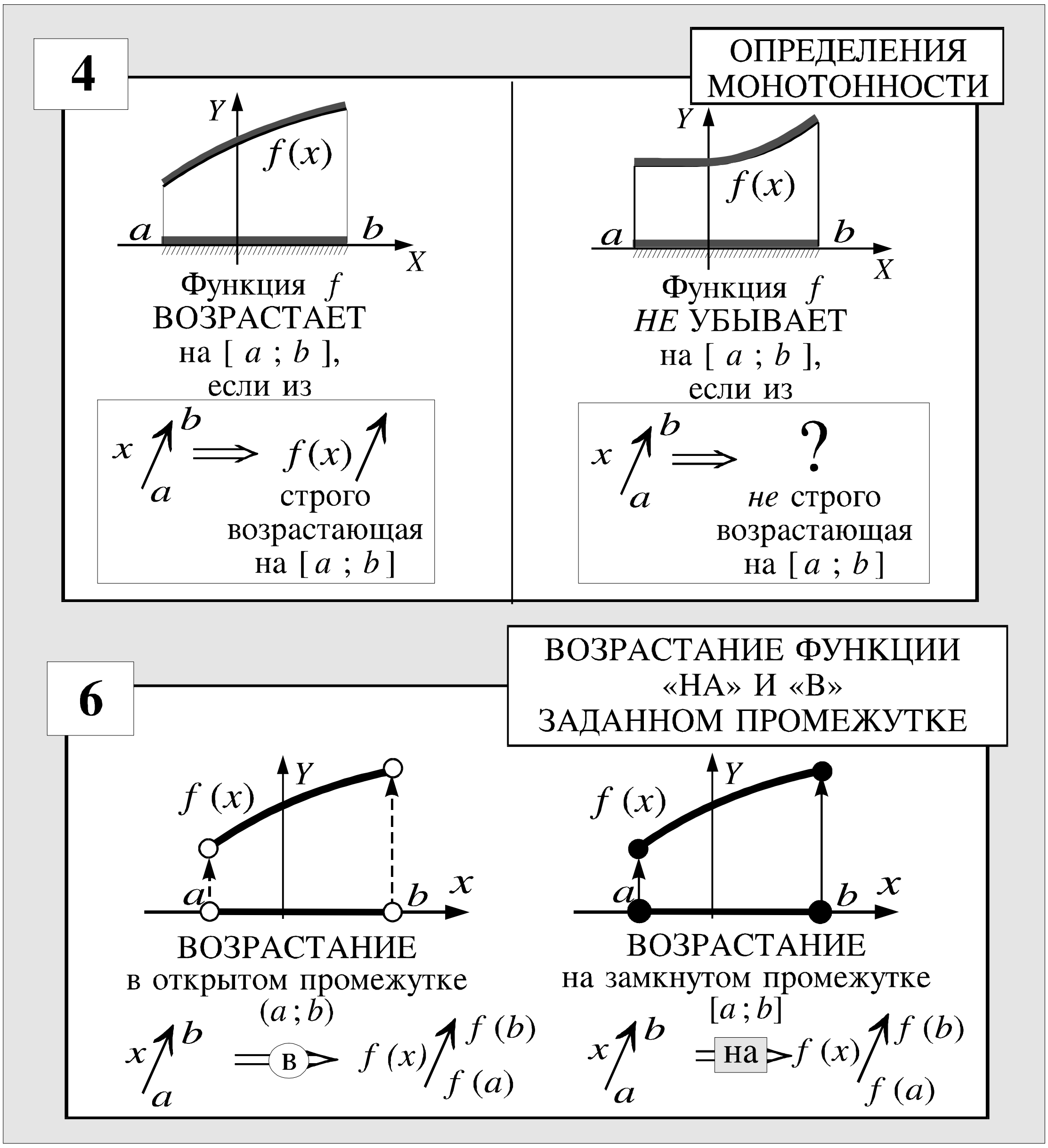

Рис. 58

Условие самостоятельности, задаваемое именно этой страницей, кажется нам чрезвычайно важным. Учащиеся зачастую не подозревают, что можно не заучивать все определения подряд. Достаточно разобраться в содержании и конструкции одного или двух из них, а затем по полученному образцу (не буквально, а как по модели) осуществлять формулировки всех остальных. Таким образом, достигается цель активного восприятия и усвоения (а не пассивного зазубривания) фрагмента учебной математической теории.

Структурные тонкости.

Монотонность тесно связана с особенностями задания функции на конкретном промежутке. Полезно сделать "небольшую остановку" и разобраться в возможных границах исследования функции "внутри" и "на всем" интервале (рис. 58), что, несомненно, полезно для формирования и воспитания двух важнейших сторон мышления – визуальной и логической.

Отметим, что для выполнения подобных упражнений уровень только визуального или только формально-логического мышления явно недостаточен. Необходима визуально-логическая основа мышления (его сторона) (см. с. 24).

Содержательные примеры.

После введения определения чрезвычайно полезны примеры содержательного характера.

На данном этапе компоненты мышления – логическое и визуальное – объединяются. Тем самым вся предварительная подготовка (введение нового понятия, затем – его определение) переходит в стадию образования стандарта (см. приложение, с. 373, рис. 123).

Этап 3. *Применение понятия*

Следующий важный этап – применение понятия в различных ситуациях. Материалы тетради, подобной изложенной выше, полезно подкреплять соответствующим продолжением. В данном случае речь идет о рассмотрении функциональных зависимостей между числовыми значениями измерений элементов плоских фигур и пространственных тел с позиций исследования их поведения на монотонность. Обсудим одну из таких страниц (см. приложение, с. 374, рис. 124, вверху).

Это упражнения, для выполнения которых достаточны “действия по модели”. Например, “Приняв за независимую переменную величину радиуса R сектора, определить характер изменения длины его дуги и величины площади при изменении R от r_1 до r_2”.

Этап 4. *Свертывание*

В конечном итоге мы приходим к информационной схеме – справочнику, где кратко изложены все рассмотренные ранее материалы (см. приложение, с. 376, рис. 126). Отметим, что схема “хорошо работает” только тогда, когда ученик усвоил присущие ей символику и терминологию, принял способы рассуждений и стиль оформления. Кроме того, невозможно (и не нужно в схеме) восстанавливать все содержание тетради полностью – некоторые сведения в ней присутствуют в неявном виде. Следовательно, материал схемы нельзя будет использовать как формальную шпаргалку – ее применение практически невозможно без понимания и определенных знаний и умений.

В результате всех проведенных исследований абстрактное понятие монотонности приобретет визуально воспринимаемые черты, которые могут быть конкретизированы переводами в формулу и текст, поскольку все этапы строятся на сериях визуально-логических задач. (В таких случаях возможны интересные субъективные ассоциации и неординарные суждения об одном и том же объекте).