§3. Визуальные переводы учебной математической информации

В начальных параграфах настоящего исследования мы уточнили характер психической деятельности ученика, включаемой в понятие "визуальное мышление", затем обсудили особенности изложения и оформления содержания учебного знакового материала. На данном этапе мы обращаемся к очередной задаче: выяснить взаимоотношения между различными способами работы с учебной знаковой информацией.

Понятие "визуальный перевод" в наших рассуждениях является центральным. Под **визуальным переводом** мы подразумеваем ту умственную деятельность учащегося, которая осуществляется в ходе визуального восприятия начальных или промежуточных данных информационного сообщения путем расшифровки их с помощью запаса готовых, известных заранее визуальных форм, символических образований или терминов-наименований.

Уже здесь отметим немаловажное обстоятельство. В зависимости от ситуации, целей и средств обучения каждый из способов предъявления информации может трактоваться неоднозначно. Текст может восприниматься как формула, если речь идет, к примеру, об анализе его структуры, выделении и отождествлении его объектов, что так характерно для уроков родного и иностранных языков. Рисунок также может интерпретироваться как некоторый символ. С другой стороны, в отдельных случаях формула выступает как рисунок или текст и т.д. Таким образом, визуальный перевод (или, для краткости, просто перевод), есть не что иное, как установление связей между рисунком, текстом и формулой.

Цикличность обусловливается возможностью (а в большинстве случаев и необходимостью) сопровождения каждого из этапов приема, анализа и преобразования информации соответствующими словесными, формульными или иллюстративными “комментариями”. Несомненно, что этот процесс должен рассматриваться двусторонне.

Учитель рассказывает, объясняет. Ученик смотрит и слушает, вникает и запоминает. Однако в этой схеме, как известно, возможны вариации. Учитель превосходно владеет материалом, доходчиво объясняет содержание. Но слушатель не готов воспринимать его интерпретацию – нет прочной базы, не владеет “языком”, посредством которого излагается информация и т.д., и если (в силу каких-то обстоятельств) не учитываются возможности учащихся, то, как результат, следует “неудача обучения”. То же можно сказать и об обратной стороне дела.

В книге «Педагогика математики» [177, с. 67] А.А. Столяр пишет: «Трудности, связанные с реализацией принципа сознательности, обусловлены отчасти... тем, что до сих пор недостаточно изучен механизм понимания. Мы по существу не знаем точно, что означает “понимать”... Заключение... что ученик понял (а не только знает) материал, является лишь правдоподобным, но не достоверным».

По-видимому, ни знания, ни умения, ни даже они вместе не являются гарантией понимания. Можно знать, для чего предназначен, как работает, какую продукцию может изготовить тот или иной механизм, можно уметь обращаться с ним. Но это еще не означает понимания принципов его работы, его скрытых, подчас неожиданных возможностей эксплуатации, действия в нестандартной ситуации. Так, например, нередки случаи, когда учащийся с хорошей слуховой памятью достаточно точно цитирует несложный фрагмент вербального математического текста (определение или теорему), но затрудняется в применении его положений, не владеет инструментами к выявлению его содержательной стороны, основы.

Один из путей решения проблемы понимания мы видим в использовании различных языков предъявления информации и развитии навыков перевода с одного языка на другой. Рассмотрим некоторые из возможных отношений между текстом, рисунком и формулой.

3.1. Вербализация и визуализация

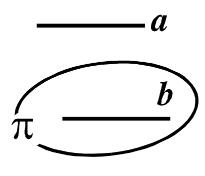
Проанализируем изложение одной из геометрических теорем в различных учебных пособиях, чтобы акцентировать внимание на том общем, что присуще традиционным способам изложения учебного теоретического материала.

ПРИМЕР 1. *Теорема 10.2. (признак параллельности прямой и плоскости).* «Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в ней, то она параллельна и этой плоскости» [132, с. 57].

ПРИМЕР 2. *Теорема 1. (признак параллельности прямой и плоскости).* «Пусть прямая a не лежит в плоскости π. Если в плоскости π есть прямая b, параллельная прямой a, то прямая b параллельна плоскости π» [12, с. 82].

ПРИМЕР 3. *Теорема 15.2. (признак параллельности прямой и плоскости).* «Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости» [1, с. 159].

Хотя все три текста дают один и тот же ясный визуальный образ, даже эта несложная теорема совсем не просто усваивается учащимися. Не все могут сразу отождествить его с текстом и записать формулу (рис. 10).



$$\left.\begin{array}{l} b \subset \pi \\ a \not\subset \pi \\ a \quad b \end{array}\right\} \Rightarrow a \quad \pi$$

Рис. 10

В примерах 1 и 3 вся информация дается в одном предложении сложной структуры. Для понимания смысла каждого из них (т.е. для понимания их содержания) необходима достаточно высокая культура и навык чтения подобных текстов. В примере 2 структура более четкая: в первом предложении определяются основные объекты, и только затем описывается третий, после чего следует вывод. Однако символ “π”, обозначающий здесь простейшее геометрическое понятие “плоскость”, может внести путаницу в головы наших учеников (привычно воспринимать греческую букву π как радианную меру угла).

Подобные тексты порождаются требованиями определенного уровня строгости введения математических определений, т.е. соблюдения четкости, точности, полноты, непротиворечивости и т.д. Как результат специфика математического изложения должна определять: **знание** вида тех или иных фигур (символов), **умение** выделять их среди множества объектов данной природы, **навыки** изображения их, понимание как эти изображения строятся и еще, к тому же, решать разнообразные задачи.

Обратим внимание на важное обстоятельство, столь характерное для предметов математического цикла. Каждую новую теорему учебника обычно сопровождает “директива” учителя: “Выучить формулировку и доказательство теоремы №...”. Ученик, занимаясь дома по одному из рекомендованных учебных пособий, усваивает не столько само содержание, сколько все особенности изложения (порядок слов, их соподчинение, обозначения и т.п.), принимая именно их за основу.

Ввод теоремы (определения, следствия) жестко закреплен реализованной в тексте конструкцией “посылка-заключение”. Подобные тексты выступают как отдельные самостоятельные (изолированные) фрагменты учебной теории, психологически обусловливая дискретность восприятия содержания текста параграфа в целом. Непрерывность в осознании идей и методов формируется в лучшем случае при обобщении, обзорном повторении. Нумерация теорем еще более способствует дроблению восприятия, одновременно обезличивая каждое из математических высказываний. К тому же некоторые авторы выносят теоремы в раздел задач, которые не всегда решаются, что значительно затрудняет их применение в конкретной ситуации.

Таким образом, теоретическая часть курса выделяется из всей массы учебного материала в некоторую особую подсистему. Она изолируется от прочих видов учебной математической информации (задач, упражнений, вопросов и проблемных ситуаций) не только по своему способу предъявления, но и по целям, принципам их реализации. “Моменты” (этапы) процесса познания при изучении теорем вынуждено “строятся” по-иному, нежели вся основная учебная деятельность.

Тем самым как бы намеренно организуется разрыв между теорией и практикой – наша “математическая щепетильность” оборачивается против нас самих.

Требование думать, наблюдать, искать, проявлять самостоятельность обычно ослабляется или вообще исчезает при введении теоретических положений курса. Теоремы предлагаются для принятия к сведению, без включения активного мыслительного действия, без поисков, ошибок, нахождения выходов из тупиковых ситуаций. Есть готовый текст и нужно лишь разобраться (если сможешь!) и выучить, что написано в учебниках или тетрадях. Описания самими учащимися подобных математических ситуаций обычно “опускаются”. Практически они невыполнимы даже на основе более удачных, чем приведенные выше, текстов из-за отсутствия навыков перевода визуальных данных на вербальный способ их задания и наоборот. В лучшем случае такой результат приходит гораздо позднее, чем этого требует процесс обучения. Следовательно, помимо проблемы изложения учебного знакового материала здесь налицо опять-таки проблема перевода.

Перевод слова в образ может сопровождать все основные этапы изучения вербального фрагмента. При этом значительно возрастают требования к выполнению рисунка-иллюстрации. Хороший рисунок “молчит, но говорит” (*Tacet, sed loquitur*), помогая усвоению содержания текста.

Действительно, геометрическая интерпретация данных позволяет охватить содержание информации “в целом”, выделить стандартные визуальные образы, определить общие или различные элементы, с помощью которых можно выйти на правильное решение, обобщить на уровне зрительного восприятия многие теоретические положения. Этот момент мы полагаем чрезвычайно важным. Он создает необходимую основу для взаимно-обратного перевода с “языка слов” на “язык зрительных образов”.

Приведем прекрасные рекомендации, которыми предваряет одно из заданий заочная физико-математическая школа при МФТИ.

«Выполняя чертеж (рисунок), стремитесь сделать его соответствующим условиям задачи... Хороший чертеж – это удобный для восприятия наглядный способ записи условия... он может стать помощником в решении ... подсказать правильный ход рассуждений. В то же время даже самый аккуратный... чертеж сам по себе ничего не доказывает. Все, что “увидено” из чертежа должно быть обосновано соответствующим выводом» [107, с. 3]. Чертеж (как рисунок, иллюстрация) позволяет: охватить содержание информации “в целом”, выделить основополагающие учебные стандарты, определить особые (общие или индивидуальные) элементы, с помощью которых можно получить подсказку к решению, создать на уровне зрительного восприятия предпосылку к усвоению теоретического положения.

Рассмотрим пример. Ученику предлагается следующая задача:

“В треугольнике *ABC* биссектрисы углов *A* и *C* пересекаются в точке *O*, через которую проведена прямая *DE*, параллельная *AC*. Доказать, что длина отрезка *DE* равна сумме отрезков боковых сторон, прилежащих основанию *AC*”.

Текст достаточно велик, чтобы можно было благополучно охватить содержание целиком, непосредственно из него делать какие-то выводы. Переведя текст в картинку (рис. 11, верхний блок, в центре), ученик имеет визуальную интерпретацию словесного описания в свернутом, но наглядном виде.

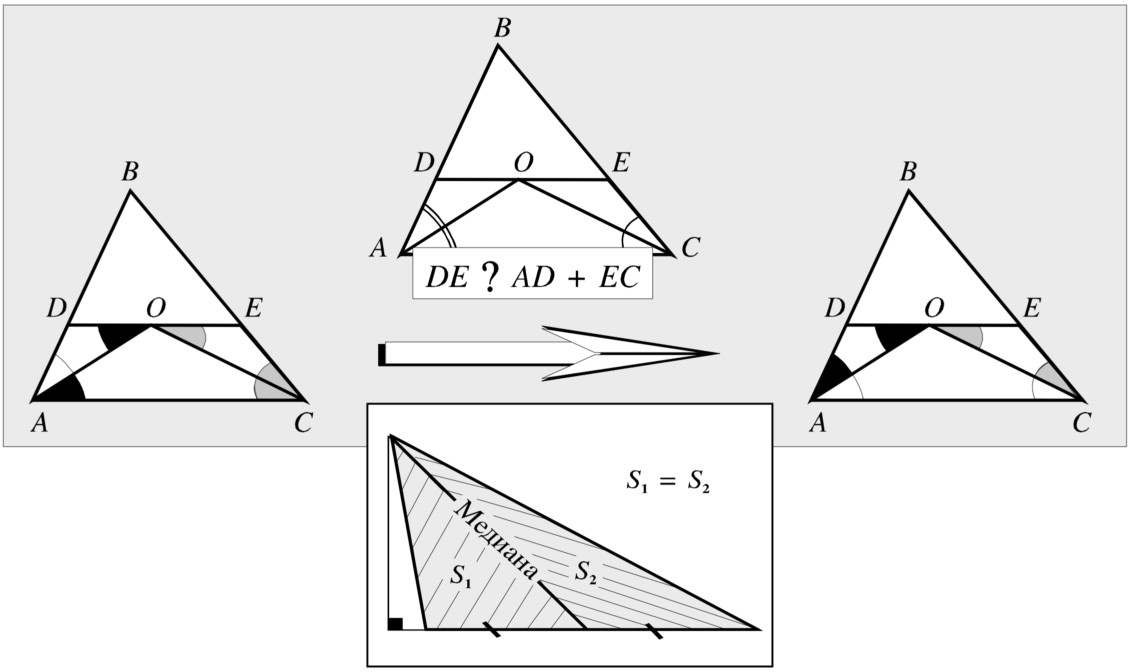


Рис. 11

Составляя план решения задачи и обосновывая результат, ученик продолжает работать с рисунком, по которому можно проследить ход его мысли (рис. 11, верхний блок, слева и справа).

Таким образом, мы приходим к выводу о необходимости разработки методических приемов перевода вербальной информации на язык образов. Более того, догадаться о возможности и необходимости преобразования рисунка для того, чтобы ответ стал видимым, могут не все. Нужны определенные ориентиры и алгоритмы для подобной деятельности. Отсюда естественным образом вытекает соответствующая методическая проблема – создание класса учебных задач, в которых исходной посылкой является рисунок.

Геометрическая интерпретация данных при изложении математического материала обычно применяется либо в качестве иллюстрации того или иного положения теории, либо демонстрации содержания конкретной учебной задачи. Однако на самом деле, ее роль более многогранна. Американский исследователь М. Иден достаточно четко формулирует существенное свойство визуальной информации (в его обозначении – письменной речи): «Легче поддается изучению письменная речь. Она достаточно устойчива и, ... является своим собственным визуальным предоставлением... Она позволяет людям обмениваться с помощью зрительных образов по существу той же информацией, которой они могли бы обмениваться в устном разговоре» [74, с. 174].

Среди многих аспектов использования картинки (чертежа) можно добавить к уже перечисленным (с. 38-40) следующие:

- картинка как разъяснение содержания фрагмента учебного текста;
- картинка как решение определенного вопроса;
- картинка как макет для разрешения поисковой ситуации, средство выхода из тупиковой ситуации, когда все формульные или вербальные средства исчерпаны;
- картинка как собирательный образ нескольких фактов математической учебной теории;

Например, образ, представленный на рис. 11 (внизу), порождается соответствующим текстом: “медиана треугольника делит его на две равновеликие части”. Как результат данный образ представляет собрание фактов: медиана, опущенная из вершины треугольника, делит его противоположную сторону на две равные части, а сам треугольник – на два таких, площади которых равны.

Данный пример лишний раз убеждает в том, что рисунок, изображающий даже частный на первый взгляд случай, может нести в себе информацию, свойственную полному объему понятия. Аналог этому можно найти у Биркгоффа [18, с. 72]: «Любая ... форменная одежда – стюардессы авиалайнера, официанта, железнодорожного служащего или полицейского – это знак, который показывает нам все многообразие связей этого человека с нами и обществом, знак очень точный, ясный и потому экономичный в смысле “спрессованности” огромного объема информации, содержащегося в нем».

- картинка как материал для формирования параллелей и аналогий.

Представление о сложности создания визуальных аналогий можно почерпнуть в книге Бернана Ноэля «MAGRITTE»: «Аналогия – творческое средство; оно состоит в сходстве отношений; от природы этих отношений зависит сила или слабость сотворенного образа. Образ не создается, если сравниваются (всегда приблизительно) две реальности, не имеющие между собой никаких отношений» [122, с. 60]. Этот сложный и глубокий вопрос выходит за рамки данного исследования, однако укажем, что ценность его в обучении несомненна.

«В какой степени полезны модели? Интересно, что модели очень часто помогают в работе, и большинство преподавателей физики пытаются учить тому, как пользоваться моделями, чтобы выработать хорошую физическую интуицию. Но всегда выходит так, что величайшие открытия абстрагируются от модели, и модель оказывается ненужной. Максвелл создал электродинамику, наполнив пространство массой воображаемых шестеренок и зубчатых колесиков. Но колесики и шестеренки мы отбросили, а теория осталась. Дирак же открыл правильные законы релятивистской квантовой механики, просто угадав уравнение» [186, с. 49].

3.2. Рисунок – формула – текст

Перейдем к следующей визуальной комбинации. Обсудим комбинацию “рисунок – формула”, роль которой особенно велика в предметах математического цикла. В книге “Язык, музыка, математика” [28] приведены семь специально оформленных таблиц чисел натурального ряда от единицы до ста. Обсудим фрагменты двух первых таких таблиц (см. приложение, с. 389, рис. 139, вверху). Авторы пишут: “Эти таблицы говорят сами за себя. При взгляде на них становятся заметным многие важные свойства делимости”.

Читателю нетрудно догадаться – нужно, глядя на определенную таблицу, сформулировать важное свойство делимости натуральных чисел. Практически здесь предлагается – “*exipsa fonte bibere*” – испить из самого источника. Например, верхняя таблица слева выделяет столбики чисел, оканчивающихся на **2**, **4**, **6**, **8** и **0**. Продолжая процесс визуального анализа левой таблички, мы извлекаем из нее дополнительные сведения-подсказки и оформляем свои догадки словами-терминами (числа четные). Провести исследования и оформить заключение можно так, как показано на рис. 139, внизу (см. приложение, с. 389, внизу и в центре).

Комбинация «рисунок – формула» позволяет расширить возможности символически-наглядного способа представления информации (с. 45). Так, к примеру, специальным образом распределяя символы, входящие в формулу можно составить рисунок, который позволяет:

- организовать поисковую ситуацию;
- разобраться в тонкостях взаимосвязанных операций;
- оформить структуру, направленную на формирование алгоритма (см. приложение, с. 360, рис. 110, вверху, слева; с. 421, рис. 171, в центре).

Невнимание к потребностям визуального мышления школьников приводит к тому, что задания типа: “Скажите, о чем говорится в задаче?”, “Определите, что изображено на картинке?”, “Уточните, чему посвящено содержание теоремы?” часто ставят их в тупик. На вопрос “Возникают ли в вашей учебной деятельности ситуации, когда преподаватель спрашивает, а вы даже не знаете, о чем нужно говорить?” ответ (во все годы и в различных группах) однозначен: “Почти всегда”.

Данное явление объясняется тем, что учащиеся не умеют из информации, предъявленной им тем или иным образом, выявить понятие, являющееся центральным, т.е. осуществить хотя бы частичный перевод. Такой перевод станет возможен, если учащийся сумеет произвести «разбиение изучаемого материала на небольшие порции по смысловому содержанию с выделением опорных пунктов в форме тезисов, заголовков, вопросов» [177, с. 79].

Применительно к основной поставленной в данной работе задаче (обосновать и осуществить объединение трех способов предъявления учебной знаковой информации) данное положение будет трактоваться как основа для перевода.

Мы полагаем, что не только для запоминания, но и для понимания содержания учебной задачи, полезно сформировать у учеников умение разбивать предлагаемую информацию на порции для того, чтобы выделить объект, определить «радиус его действия» и затем уже описать сопутствующие явления. При перечисленных условиях, которые автор «Педагогики математики» сформулировал как основу для запоминания (а мы принимаем и как руководство к пониманию), должны более успешно протекать процессы осмысления и освоения учащимся учебного знакового материала.

Разбор любой визуальной задачи можно начинать в рамках известной конструкции Пойя: Что? Где? Когда? (Какой? Почему? и Как?) [16, 132]. Действительно, к примеру, описание свойств изображенного на некотором рисунке объекта должно, прежде всего, начинаться с определения: “ЧТО задано?” (О чем говорится?). Именно этот вопрос вызывает наибольшие затруднения. Учащийся не понимает, что на самом деле его спрашивают: “Что здесь изображено (записано)?”, а только потом возникает требование описания свойств этого понятия. А раз неясен сам изначальный вопрос, то отсюда, как следствие, и непонимание, в каком направлении проводить анализ данных. Подобная ситуация может возникнуть при решении задачи, посвященной условию компланарности векторов (центре тяжести треугольника), представленной на рис. 12.

Желая помочь ученику, преподаватель спрашивает: “Что рассматривается?”. Это трудный вопрос – на рисунке много визуально определяемых объектов, классифицировать которые можно по разным признакам. Распознать сразу в каком направлении вести исследования мешает возможная альтернатива, которая, как правило, и создает соответствующий “тупик” в диалоге.

Следующим по порядку идет ГДЕ-вопрос. В предлагаемом ниже примере (рис. 13) он может быть поставлен так: на каком из участков области определения функции ее график совпадает: с параболой? с прямой $y = x$? с прямой $y = \mathbf{1}$? На каком отрезке функция возрастает? В какой точке обращается в нуль? и т.д.

КОГДА-вопрос предполагает в ответе определенное мастерство описания, квалифицированное подведение итогов наблюдения и анализа. Для того же примера (рис. 13): когда x стремится к $\mathbf{0}$ слева, функция $f\left(x\right)$ стремится к $\mathbf{0}$ сверху (убывает, оставаясь положительной).

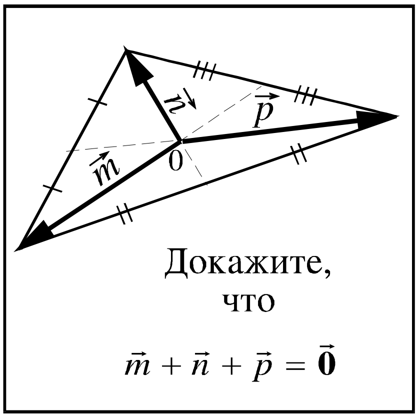


Рис. 12

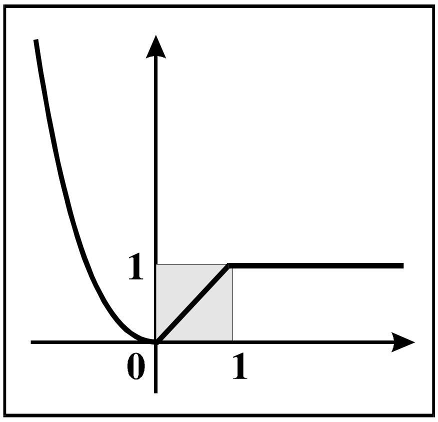
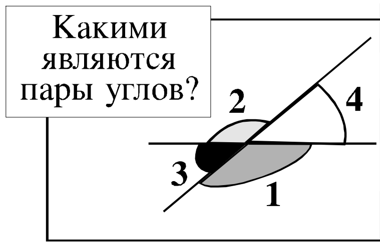


Рис. 13

Таким образом, все сводится к умению учащихся понимать и выстраивать словесные, а затем или же одновременно и формульные описания визуальной информации по определенному алгоритму. У Пойя [133, с. 103] эти рекомендации несколько расширены: «Ваши лучшие пять друзей: Что? Почему? Где? Когда и Как? Если вам нужен совет обратитесь к Что, обратитесь к Почему, обратитесь к Где, Когда и Как – и больше ни к кому не обращайтесь». Здесь, на наш взгляд, должно в первую очередь сработать начальное “звено цепочки”, с неизменно заложенными в ней связями: картинка–наименование–формула.

Все это мы рассматривали как бы со стороны ученика. Теперь обсудим эту же проблему со стороны учителя.

При постановке вопросов полезно учитывать положение Белнапа: “По числу предоставляемых альтернатив вопросы можно разбить на два класса. В один класс попадают вопросы, которые задают небольшое или, во всяком случае, ограниченное число альтернатив, а в другой – вопросы, которые задают бесконечное или, по крайней мере, большое число альтернатив ... ” [16, с. 29]. Например, отвечая на первый вопрос рис. 14, углы “**1**” и “**2**” можно охарактеризовать как равные, тупые, вертикальные и т.д.



1	**1** и **2**
2	**2** и **3**
3	**3** и **4**
4	**2** и **4**
5	**1** и **4**

Рис. 14

В школьной практике подобные альтернативы весьма полезны – каждый ученик может дать свой ответ или принять точку зрения другого. При этом учитель имеет возможность получить информацию о полноте и точности их представлений.

Итак, изучение картинки сопровождается серией вопросов. Однако если вопрос содержит слишком большое число альтернатив, то он ставит ученика в тупик. Следовательно, необходимы вопросы, которые предусматривают определенные, достаточно четкие альтернативы. Такие вопросы могут формироваться принципами, изложенными Пойя [133, с. 14]: «Характерные черты, общие для всех вопросов и ответов таковы: здравый смысл и общность. Будучи выведенными из простого здравого смысла... они могут сами собой прийти в голову ученику. Будучи общими, они оказывают ненавязчивую помощь, они просто дают общее направление, оставляя учащемуся обширное поле деятельности».

Как показала практика, отказ от использования теоретико-множественной символики большого облегчения в обучение не принес. Учащийся, живущий в современном мире, волей-неволей вынужден применять различных символы, аббревиатур в повседневной жизни. Лишая преподавание его важнейшего инструмента – символьного способа предъявления информации, уменьшая поле его действия и значение, мы, по-видимому, противоречим возникающим новым способам общения. При целенаправленном обучении формирование умения видеть в символических образах содержание может дать инструмент к познанию. «Представляя собой условную знаковую систему, символическая наглядность по существу является своеобразным языком и, как всякий язык, должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Только в таком случае символическая наглядность будет эффективным средством обучения» [177, с. 72].

Геометрическая интерпретация данных с параллельной фиксацией их в виде цепочки символов позволяет составлять план описания рисунка (иллюстрации, чертежа). Так, к примеру, действуя по принципу “вижу-пишу”, можно обосновать все логические переходы в решении задачи: “Дать определение возрастающей функции по рис. 15”.

Если ученик применит алгоритм “Что? Где? Когда?” при переводе на символический язык, то он сможет фиксировать:

а) $f\,(x)\uparrow$;

б) $x_1, x_2 \in [a\,;b]$;

в) $x_1 < x_2 \Rightarrow f\,(x_1) < f\,(x_2)$.

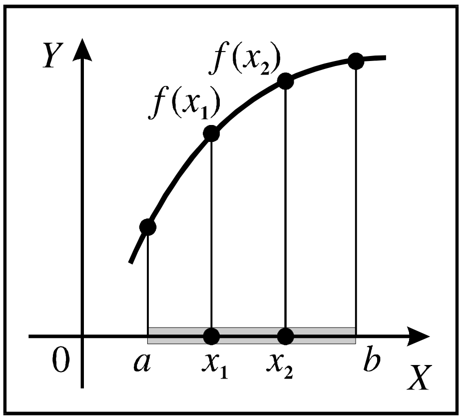


Рис. 15

Несмотря на то, что переход от рисунка к формуле наиболее прост, не всегда такой рисунок в тексте задан. Следовательно, нужно разработать такую методику, которая направляла бы ученика как можно чаще переводить формульную информацию в геометрический образ и уже от него переходить к формуле-результату.

Ярким примером такой методики является часто применяемый учителями способ получения общего решения тригонометри-.

ческого уравнения

Например, для решения уравнения $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, рекомендуется сначала изобразить соответствующие точки на тригонометрическом круге (рис. 16), затем записать решение в виде формулы:

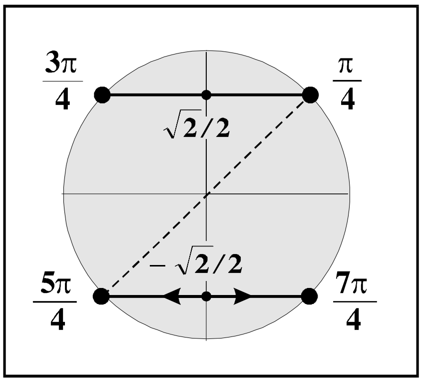


Рис. 16

$$x = \frac{\pi}{4}(2k+1) \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k \ \ (k \in Z).$$

К данному вопросу мы вернемся в дальнейших параграфах данного исследования. Здесь же для полноты общей картины кратко обсудим отношение “формула $\to$ рисунок”.

Как мы уже сказали, переход от рисунка к формуле осуществить достаточно легко. С переходом от формулы к рисунку дело обстоит значительно сложнее. Здесь совершенно необходимо абстрагирование от конкретных условий. Продемонстрируем этот процесс на примере следующей задачи: “Выяснить, какое из трех чисел больше: $3^{5/4}$, $3^{\sqrt{2}}$ или $3^{3/2}$?”.

Что может и что должен увидеть ученик в ряду заданных чисел? Явным образом просматривается общее основание – число **3**, все остальные знаки – показатели его степеней. Требование выстроить искомые числа ($3^{5/4}$, $3^{\sqrt{2}}$, $3^{3/2}$) по принципу сравнения, также вполне очевидно. Исходные данные на деле распределяются в последовательности: $5/4 = 1{,}25$, $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $3/2 = 1{,}5$. Чтобы ответить на сам вопрос задачи, достаточно извлечения фрагмента теории, который позволит получить результат с помощью визуально-логических умозаключений, а не путем вычислений (см. приложение, с. 420, рис. 170, в центре).

Абстрагирование в большинстве подобных случаев можно осуществить с помощью введения стандартного визуального образа, связи между элементами которого дадут необходимые для решения действия. В наших исследованиях этот момент составления визуальной модели мы назвали “Анализом”. Итак, имеем комплекс “формула-рисунок”. Его анализ полезен еще и тем, что он одновременно реализует решение в виде постановки отдельных конкретных исходных данных в полученную (визуально) формулу. Данный алгоритм позволяет активно использовать стандартные зрительные образы, образуя у ученика прочный навык извлечения их из памяти и применения при решении учебных задач.

Здесь мы явным образом применили принцип “геометрического познания” (по терминологии Биркгоффа, автора книги «Математика и психология»). По его мнению «Блестящие достижения греческой математики зависели от сочетания логики со зрительным воображением, без предпочтения той или другой составляющей» [18, с. 39].

При переходе от текста к формуле (особенно при изучении математики) активным образом работает абстрагирование.

Обратимся к определению абстрагирования, взятого из «Педагогики математики»: «Абстрагирование – это мысленное отвлечение общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных свойств рассматриваемых объектов или отношений и отбрасывание... этих несущественных свойств» [177, с. 24]. Например, решая задачи конкурса «Кенгуру», его участники в каждой задаче должны, учитывая реальные или искусственные условия, положенные в основу ее сюжета, абстрагироваться от конкретной ситуации.

Избыточность и недостаточность “информации”, поставляемой, к примеру, рис. 161, (см. приложение, с. 411, вверху), направлена на дифференциацию данных по степени существенности их вхождения в условие задачи. Ясно, к примеру, что “портрет дамы сердца” рыцаря на его щите к условию задачи непосредственного отношения не имеет, точно так же, как несущественным является количество “живых и мертвых” голов первого персонажа, тогда как у второго она только одна. Подробно такие условия математических заданий будут обсуждаться нами далее. Здесь же приведем соответствующий пример.

Задача. “Какова область определения функции $y = \log_5^5 \log_{0,5} x$?”.

Для того чтобы понизить уровень сложности поиска, необходимо учесть:

– степень функции $\log_5 \log_{0,5} x$ в данном случае на ее область определения не влияет: $y = \log_5^5(\log_{0,5} x) = [\log_5(\log_{0,5} x)]^5$,

– основания логарифмов существенны только лишь в приближенном оценочном значении по отношению к числовому “эталону” (больше или меньше единицы): $y = \log_a \log_b x : \begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$, – и, главное, чрезвычайно важным является не только последовательность проведения экспертных оценок, но и условия их совместимости (см. приложение, с. 419, рис. 169, внизу).

С позиций того, что «абстрагирование не может осуществляться без обобщения, без выделения того общего, существенного, что подлежит абстрагированию» [177, с. 24], мы можем составить следующий план перехода формулы в картинку:

а) определение общего (в большинстве случаев одинакового),

б) отброс несущественного в этом общем (в ряде случаев – конкретные числовые значения),

в) переход к визуальному образу (т.е. выявление структурных связей),

г) подстановка изъятых данных (возвращение, внедрение несущественного, конкретного),

д) получение ответа.

Таким образом, мы приходим к схеме – алгоритм расшифровки формульной информации вербальными средствами (рис. 17).

Эта схема наглядно представляет необходимость решения следующих методических задач: формирования умения анализировать формульную информацию, выделяя в ней общие элементы, и создание визуальных образов-стандартов. Умение пользоваться всеми видами предъявления информационных сообщений, переводить их с одного языка на другие есть основной инструмент в арсенале методических средств обучения.

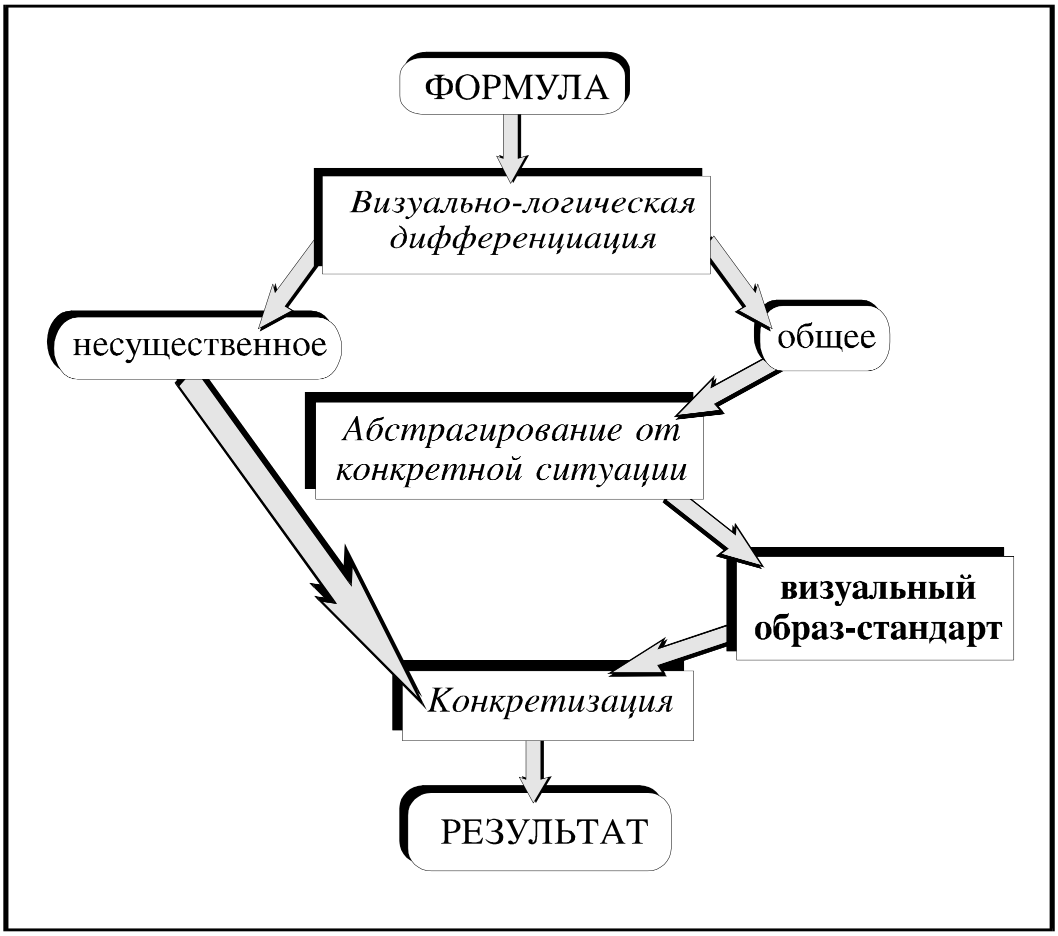


Рис. 17

Основа любого умения есть понимание. Чтобы понять, нужно знать: что искать, где искать и как искать. В связи с этим вырисовывается целый спектр задач методического характера. Главная из них – разработка методики перевода с одного языка предъявления информации на другие. Эта задача подразумевает решение следующих, более локальных вопросов:

а) разработка методических приемов перевода вербальной информации на язык образов;

б) создание нового класса учебных задач, в которых исходной посылкой является рисунок;

в) разработка методики, направляющей ученика как можно чаще переводить формульную информацию в рисунок и уже от него переходить к формуле-результату;

г) создание методических приемов для формирования учения анализировать формульную информацию, выделяя в ней общие элементы и главные структурные связи;

д) создание визуальных образов стандартов.

Решение всех выдвинутых проблем основано на следующем. Многообразие способов предъявления учебной знаковой информации, различных приемов их сочетаний лежит в основе эффективности процесса обучения в школе. Умение пользоваться всеми видами предъявления информационных сообщений, переводить их с одного языка на другие есть основной инструмент в арсенале методических средств обучения.