Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

1. Конструирование сложной функции 48
   Зависимость структуры функции от ее аргумента 48
2. Вывод производной функции в степени 50
3. Связь между экспонентой и логарифмом 52
   Представление о связях между обратными функциями 53
   Обратимость экспоненты и логарифма 54
4. Натуральные экспонента и логарифм 55
   Производная экспоненты с натуральным основанием 56
   Производная экспоненты с произвольным основанием 56
5. Связь между производными взаимно обратных функций 58
   Производная логарифма 60
6. Производная арктангенса 62
7. Производная арксинуса 63
8. Вторая производная 63
   Повторное дифференцирование 64
   Повторное дифференцирование экспоненты 66
9. Повторное дифференцирование синуса 67

Информационная схема «Производные взаимно обратных функций» 68

Самостоятельная работа 3. 70

Ответы 71

Зачет 72

Использованная литература

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

1 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

КОНСТРУИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$\underbrace{f\left[\ g\left(\underbrace{\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}}\right)\ \right]}_{\text{функция}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = g(x) \\ z = f(y) \end{array}\right\} \Downarrow \qquad z = f\left[\ y\ \right] \qquad \downarrow \qquad \boxed{y = g(x)} \qquad z = f\left[\ g(x)\ \right]$$

$$\underbrace{f\left[\ \underbrace{g\left(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}\right)}_{\text{аргумент}}\ \right]}_{\text{функция}}$$

ЗАВИСИМОСТЬ СТРУКТУРЫ ФУНКЦИИ ОТ ЕЕ АРГУМЕНТА

$$f\left[g\left(\underbrace{x}_{\textbf{аргумент}}\right)\right] \qquad \underbrace{f\left[g\left(\ *\ \right)\right]}_{\textbf{структура функции}}$$

Структура строения функции, представленной аналитически (формулой), зрительно определяется «изъятием» ее аргумента

$$f\left[\underbrace{g\left(x\right)}_{\textbf{аргумент}}\right] \qquad \underbrace{f\left[\ \ *\ \ \right]}_{\textbf{структура функции}}$$

Пример Определите структуру функции $z = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ при различных стуктурах аргумента

$z = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$z = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$z = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\underbrace{* = x}_{\text{аргумент}}$	$\underbrace{* = \cos x}_{\text{аргумент}}$	$\underbrace{* = \cos^2 x}_{\text{аргумент}}$
$z = \dfrac{1}{\cos^2 *}$	$z = \dfrac{1}{(*)^2}$	$z = \dfrac{1}{*}$

1 Тест Определите запись без скобок

выражения	$\dfrac{\sin\alpha}{2}$	$\sin\dfrac{\alpha}{2}$	$\sin^2\alpha$	$\sin\alpha^2$	$2\sin\alpha$	$\sin 2\alpha$
$[\sin\alpha]^2$						
$\sin(2\alpha)$						
$\sin(\alpha^2)$						
$(\sin\alpha)/2$						
$\sin(\alpha/2)$						

2 Тренажер

По заданной функции составьте $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1	$f(2x) =$
2	$f(\sqrt{x}) =$
3	$f(x^2) =$
4	$f\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

3 Тренажер

$f(x)=2x-1 \quad g(x)=\sin x$

составьте

1	$f\left[f(x)\right]=$
2	$g\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=$
3	$g\left[f(x)\right]=$
4	$\dfrac{1}{f\left[g(x)\right]}=$

4 Тренажер

Для $f(x)=x^2$ *и* $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

составьте

1	$f\left[f(x)\right]=$
2	$g\left[g(x)\right]=$
3	$f\left[g(x)\right]=$
4	$g\left[f(x)\right]=$

5 Тест

По заданным функциям $f(x)=x^2$ и $g(x)=x-1$

составьте функцию y	$(x^2-1)^2$	x^4-1	x^2-1	$x-2$	x^2+x-1	$(x-1)^2$	$(x-1)^4$
$y=f\left[g(x)\right]$							
$y=g\left[f(x^2)\right]$							
$y=f\left[g(x^2)\right]$							
$y=g\left[g(x)\right]$							
$y=f\left[g^2(x)\right]$							

6 Докажите, что

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}, \qquad f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$$

7 Докажите, что

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}, \qquad f(x)=x^2-2$$

2

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ВЫВОД ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕНИ

$$\left[f^2(x)\right]' = \left[f(x)\cdot f(x)\right]' = f'(x) \cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x) = 2\frac{f^2(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$\left[f^3(x)\right]' = \left[f^2(x)\cdot f(x)\right]' = \underbrace{2f(x)f'(x)}_{\left[f^2(x)\right]'}\cdot f(x) + f^2(x)\cdot f'(x) = 3\frac{f^3(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$\left[f^4(x)\right]' = \left[f^3(x)\cdot f(x)\right]' = \underbrace{3f^2(x)f'(x)}_{\left[f^3(x)\right]'}\cdot f(x) + f^3(x)\cdot f'(x) = 4\frac{f^4(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$$

....

$$\left[f^n(x)\right]' = \left[f^{n-1}(x)\cdot f(x)\right]' = \cdots + \cdots = n\frac{f^n(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$$

Заполните пропуски
в таблице производных степенных сложных функций

1 Тренажер

	$f(x)$	$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$ $f'(x)$
	$f^{n}(x)$	$n\cdot f^{n}(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$
1	$\frac{1}{f^{n}(x)}$	$-n\cdot\frac{1}{f^{n}(x)}\cdot\frac{\square}{f(x)} = -\frac{n\cdot f'(x)}{f^{n+1}(x)}$
2	$\sqrt[n]{f(x)}$	$\frac{1}{n}\cdot\square\cdot\frac{f'(x)}{\square} = \frac{\sqrt[n]{f(x)}\cdot f'(x)}{n\cdot f(x)}$
3	$\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}$	$-\square\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}\cdot\square = -\frac{\square}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)}\cdot f(x)}$
4	$\sqrt[n]{f^{k}(x)}$	$\square\cdot\sqrt[n]{f^{k}(x)}\cdot\square = \frac{\square\sqrt[n]{f^{k}(x)}\cdot\square}{\square}$
5	$\frac{1}{\sqrt[n]{f^{k}(x)}}$	$\square\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{f^{k}(x)}}\cdot\square = \square$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пример $y=\sqrt{x}-1$ Составьте функцию с аргументом $x/4$, и найдите ее производную $y=\sqrt{x-1}$ **Пример**

Решение

$$y=\sqrt{\frac{x}{4}}-1=\frac{\sqrt{x}}{2}-1$$

$$y'=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{2}=\frac{\sqrt{x}}{4x}$$

Решение

$$y=\sqrt{\frac{x}{4}-1}=\sqrt{\frac{x-4}{4}}=\frac{\sqrt{x-4}}{2}$$

$$y'=\left(\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x-4}\right)'}{2}=\frac{\sqrt{x-4}}{4(x-4)}$$

2 Тренажер

Для заданной функции f(x) найдите $\left[f^2(x)\right]'$

1	$f(x)=\cos x$	
2	$f(x)=\sin^2 x$	
3	$f(x)=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$	
4	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$	

3 Серия. Найдите производную

1. $\left[\dfrac{\sin^2 x}{2}\right]'=$

2. $\left[\dfrac{4}{\cos^2 x}\right]'=$

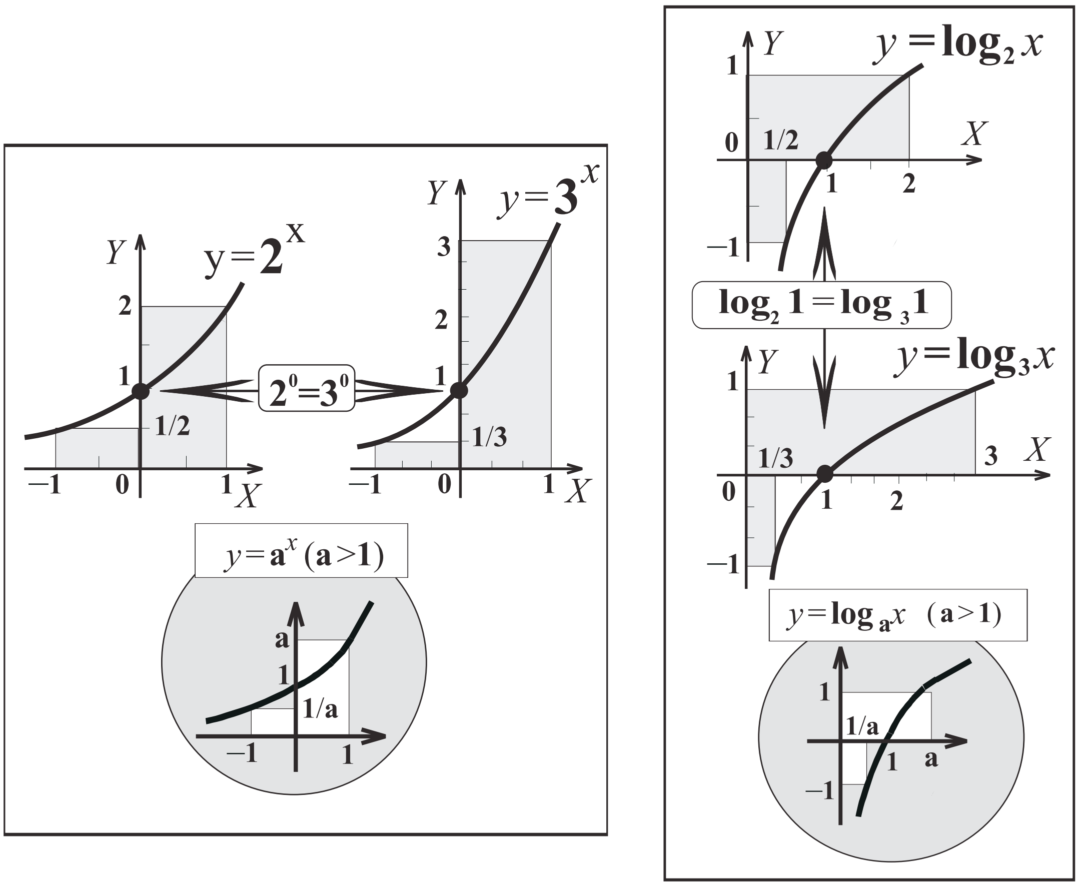
3. $\left[-\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2(2x)}\right]'=$

4. $\left[\sqrt{4\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)}\right]'=$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

3 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭКСПОНЕНТОЙ И ЛОГАРИФМОМ



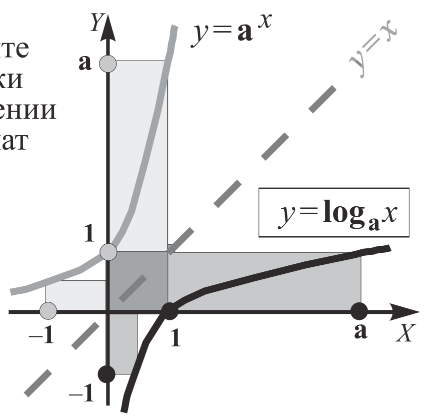
1 Тренажер

$y = a^x$ ⟷ $x = a^y$

$\log_a x = y$

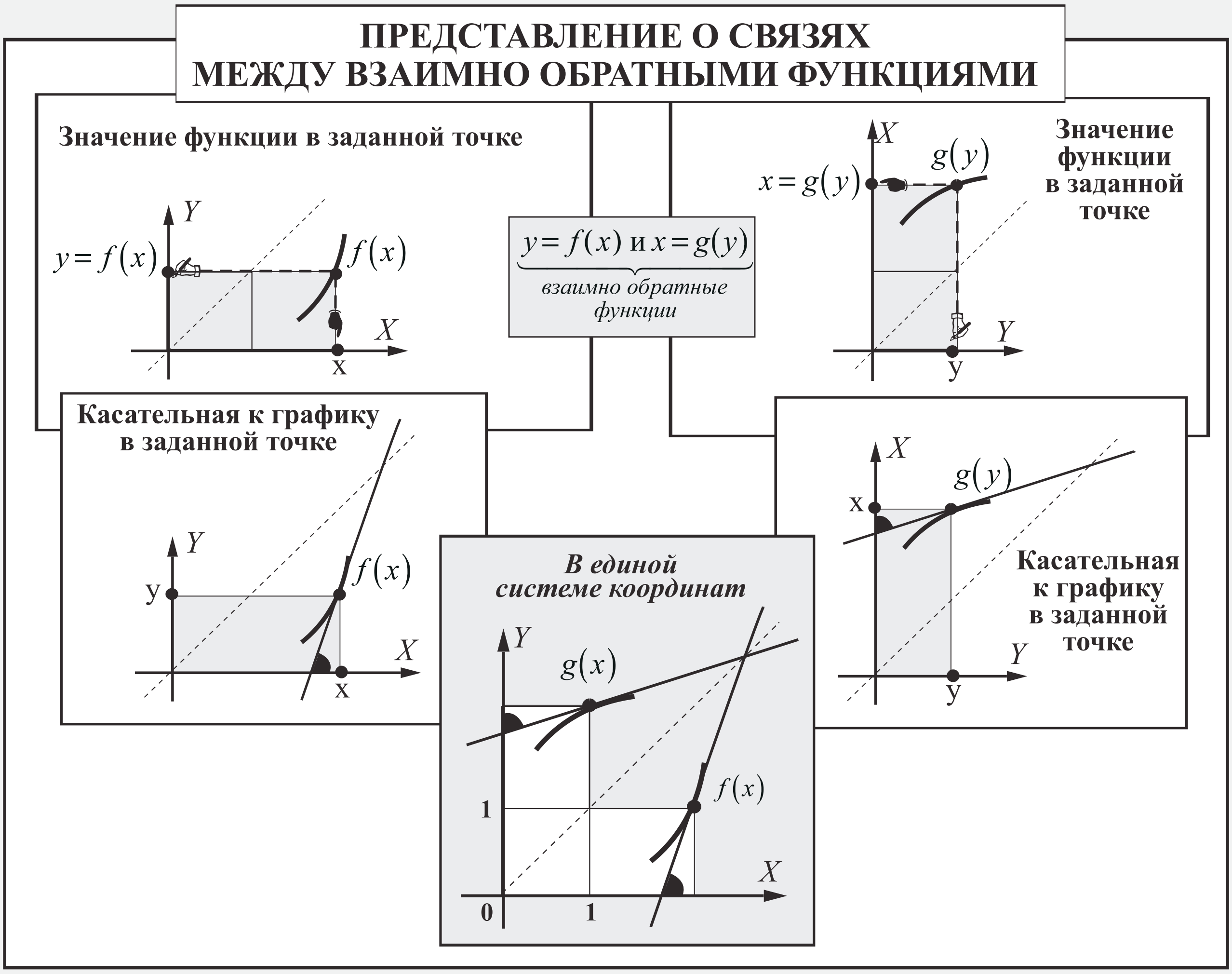
$y = a^x$		$\log_a x = y$
$(0;1)$	⟷	$(\square;0)$
$(\square;a)$	⟷	$(\square;1)$
$\left(-1;\frac{1}{a}\right)$	⟷	$(\square;\square)$

Заполните пропуски в обозначении координат точек

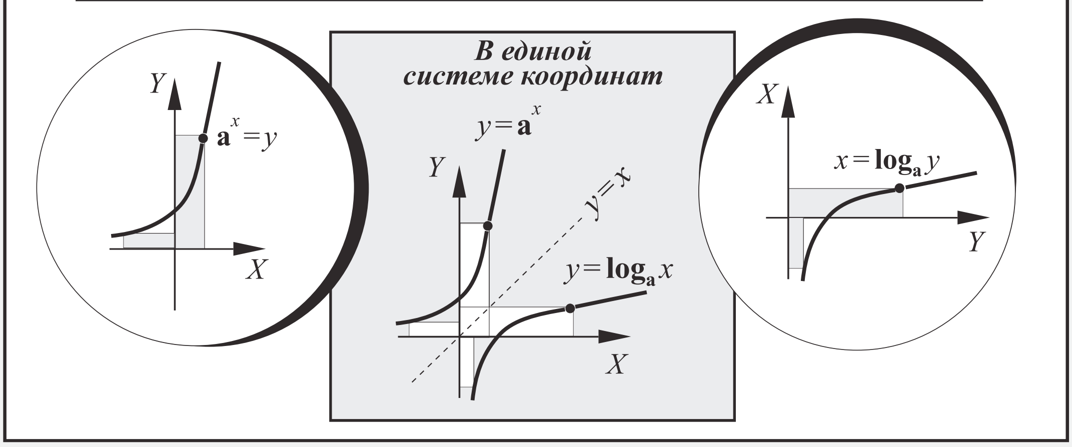


ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О СВЯЗЯХ МЕЖДУ ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ



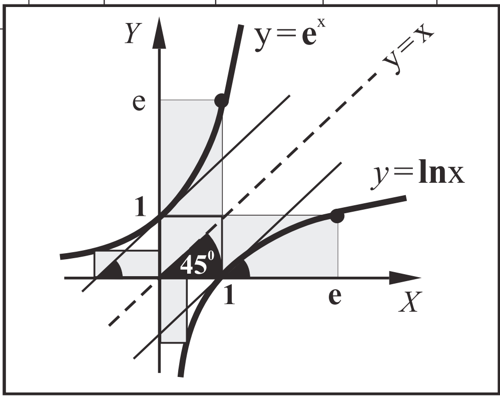
ОБРАТИМОСТЬ ЭКСПОНЕНТЫ И ЛОГАРИФМА



4 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

НАТУРАЛЬНЫЕ ЭКСПОНЕНТА И ЛОГАРИФМ

Число	x	1	2	10	100	1000	10000	100000	…
Калькулятор	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	2,71825	…



⇓

Число **e**

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to\infty}{\to} \mathbf{e}:\ 2<\mathbf{e}<3$$

ПРОИЗВОДНАЯ ЭКСПОНЕНТЫ С НАТУРАЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

$$\left(\mathbf{e}^x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathbf{e}^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^{x+\Delta x}-\mathbf{e}^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^x\cdot\mathbf{e}^{\Delta x}-\mathbf{e}^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^x\cdot\left(\mathbf{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} =$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0\leftarrow\Delta x \\ \mathbf{e}^{\Delta x}-\mathbf{e}^0\to 0 \\ \Downarrow \\ \mathbf{e}^{\Delta x}-1\approx\Delta x \end{array}}$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\mathbf{e}^x}_{\mathbf{e}^x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = \mathbf{e}^x$$

$$\boxed{\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x}$$

1 Тест

Найдите производную	$2\mathbf{e}\cdot x^{2\mathbf{e}-1}$	$x^{2\mathbf{e}}$	$\mathbf{e}^{x-2}$	$\mathbf{e}^x$	$2\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^{2x}$	$2\mathbf{e}^{2x}$
$\left(\mathbf{e}^{2x}\right)'$							
$\left(\mathbf{e}^{x-2}\right)'$							
$\left(2\mathbf{e}^x\right)'$							
$\left(x^{2\mathbf{e}}\right)'$							

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ПРОИЗВОДНАЯ ЭКСПОНЕНТЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

$$\left(\mathbf{a}^x\right)'_x = \left(\mathbf{e}^{\ln \mathbf{a}^x}\right)'_x = \left(\mathbf{e}^{\ln \mathbf{a}\cdot x}\right)'_x =$$

$x \in R$, $\mathbf{a} > 0$, $\mathbf{a} \neq 1$

$$\boxed{\left[f(\mathbf{k}x)\right]'_x = \mathbf{k} \cdot f'_{\mathbf{k}x}(\mathbf{k}x)}$$

$$= \ln \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{e}^{\ln \mathbf{a}\cdot x}\right)'_{\ln \mathbf{a}\, x} = \ln \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{x \ln \mathbf{a}} = \ln \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^x$$

$$\boxed{\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x \cdot \ln \mathbf{a}}$$

Пример

$$] \; y = 5^{(3x+2)} \Rightarrow y' = \underbrace{3 \cdot \left[5^{(3x+2)}\right]'_{3x+2}}_{\text{мысленно}}$$

$$= 3 \cdot 5^{(3x+2)} \cdot \ln 5 = 3 \cdot \ln 5 \cdot 5^{(3x+2)}$$

2 Тренажер

	Найдите производную
1	$\left(3^x\right)' =$
2	$\left(5^x \cdot x^5\right)' =$
3	$\left(\dfrac{7^{7x}}{7}\right)' =$
4	$\left(2^{5-7x}\right)' =$
5	$\left(\dfrac{1}{5e^{5x}}\right)' =$

3 Тренажер

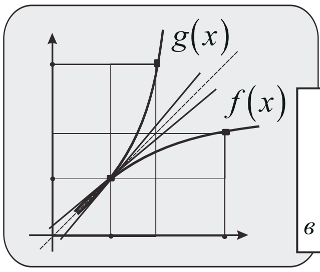
	Найдите производную
1	$\left(e^x + 2^e\right)' =$
2	$\left(e^3 \cdot 3^x\right)' =$
3	$\left(\dfrac{4^x}{e^x}\right)' =$
4	$\left(\dfrac{2^{2x} \cdot 2^{3x} \cdot 2^{4x}}{2^x}\right)' =$
5	$\left(\dfrac{1}{4^x} - \dfrac{1}{x^4}\right)' =$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

5

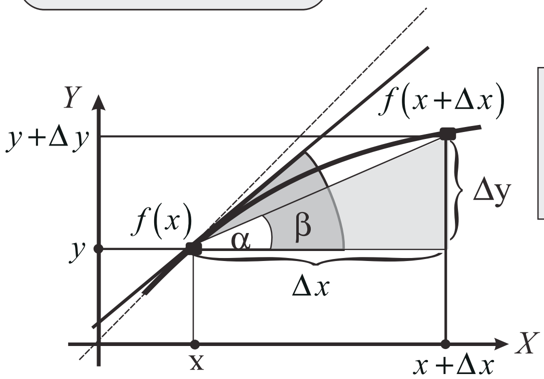
ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ



$$\underbrace{y=f(x) \qquad y=g(x)}$$

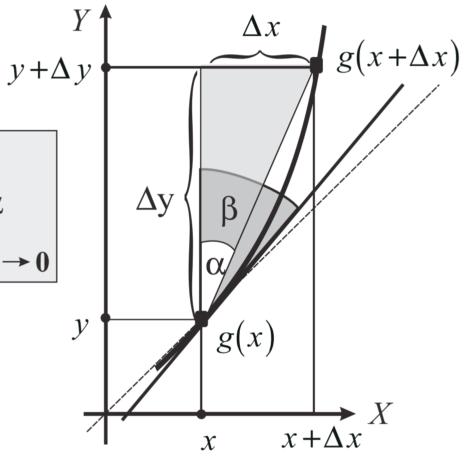
взаимно обратные функции, заданные в единой системе координат



$$\beta \underset{\Downarrow}{\rightarrow} \alpha$$

$$\mathbf{tg}\,\beta \xrightarrow[\text{при}]{} \mathbf{tg}\,\alpha$$

$\Delta x \to \mathbf{0} \qquad \Delta y \to \mathbf{0}$



$$\mathbf{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{tg}\alpha = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}_{y'_x}$$

$$\boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}}$$

$$\mathbf{tg}\beta = \lim_{\Delta y \to 0} \mathbf{tg}\alpha = \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}_{x'_y}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМА

$x \in R$
$\mathbf{a} > \mathbf{0}$
$\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$

$$x = \mathbf{a}^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \mathbf{log_a}\, x$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}} \qquad \Downarrow$$

$$x'_y = \mathbf{a}^y \ln \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad y'_x = \frac{1}{\mathbf{a}^y \ln \mathbf{a}}$$

$$\Downarrow$$

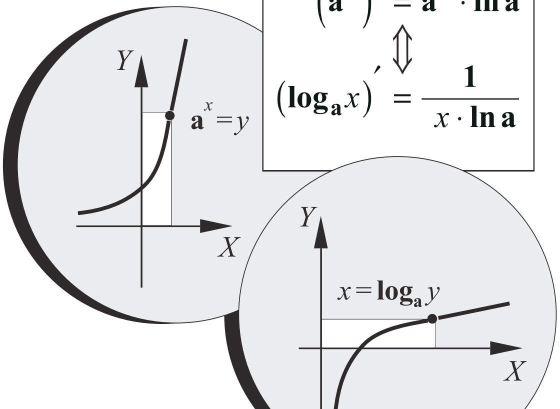
$$\boxed{(\mathbf{log_a} x)'_x = (\mathbf{log_a} x)' = \frac{1}{x \ln \mathbf{a}}}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$(\mathbf{a}^x)' = \mathbf{a}^x \cdot \ln \mathbf{a}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\mathbf{log_a} x)' = \frac{1}{x \cdot \ln \mathbf{a}}$$



ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пример] $y = \log_5(3x+2)$

$$y' = \underbrace{3\cdot\left[\log_5(3x+2)\right]'_{3x+2}}_{\textit{мысленно}} = \frac{1}{(3x+2)\cdot\ln 5}\cdot 3 = \frac{3}{\ln 5\cdot(3x+2)}$$

1 Докажите, что $\left(a^x\right)'\cdot\left(\log_a x\right)' = \dfrac{a^x}{x}$

2 Тренажер

Найдите производную	
1	$\left(5\cdot\log_5 x\right)' =$
2	$\left(\ln 4 - \ln x\right)' =$
3	$\left(\dfrac{1}{3\ln^3 x}\right)' =$
4	$\left(\dfrac{\log_2 x}{2^x}\right)' =$

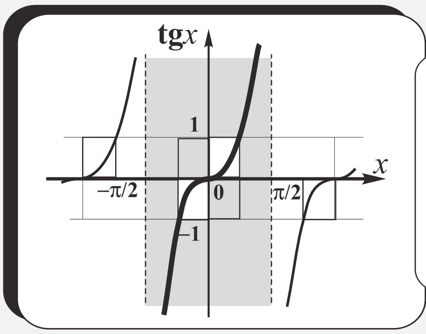
3 Докажите, что $\left(a^x\cdot\log_a x\right)' = a^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x\cdot\ln a}\right)$

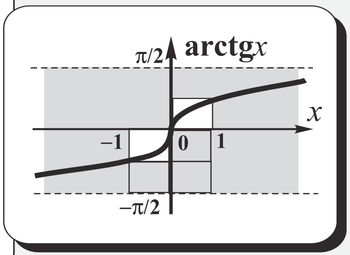
4 Тест

Найдите производную	$7e^{7x}$	e^{7x}	$7e$	7	$7x^6$	$\frac{7e}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{7e}$
$\left[e^{7x}\right]'$								
$\left[\ln(7ex)\right]'$								
$\left(7e\ln 7x\right)'$								
$\left[e^{7\ln x}\right]'$								
$\left[7\ln\left(e^x\right)\right]'$								

6

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ





ПРОИЗВОДНАЯ АРКТАНГЕНСА

$$x = \mathbf{tg}\, y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \mathbf{arctg}\, x, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_y' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \mathbf{tg}^2 y = 1 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y_x' = \frac{1}{1 + \mathbf{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\mathbf{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

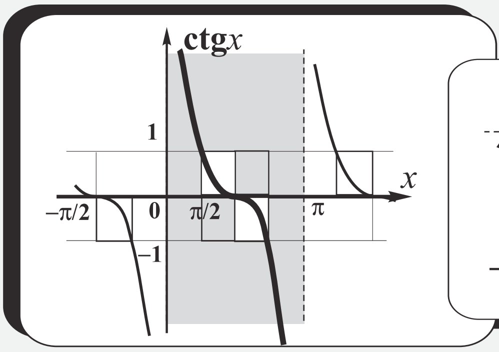
Пример

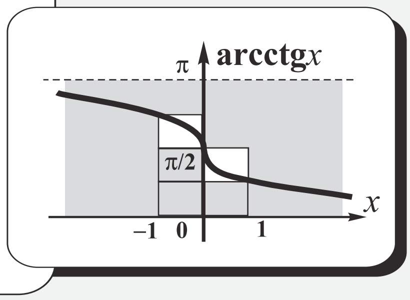
$$\left[\mathbf{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)\right]' = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \left[\mathbf{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)\right]'_{\left(\frac{x}{3}\right)}}_{\text{мысленно}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{3}{9 + x^2}$$

1	Докажите, что

$$\left[\frac{\mathbf{arctg}(\mathbf{k}x)}{\mathbf{k}}\right]' - \left[\mathbf{k} \cdot \mathbf{arctg}\left(\frac{x}{\mathbf{k}}\right)\right]' = \frac{x^2(1 - \mathbf{k}^4)}{(1 + \mathbf{k}^2 x^2)(\mathbf{k}^2 + x^2)}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ





2	Докажите, что

$$x = \mathbf{ctg}\,y \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \mathbf{arcctg}\,x$$

$$\mathbf{0} < y < \pi \qquad\qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_y' = \qquad \Leftrightarrow \qquad y_x' =$$

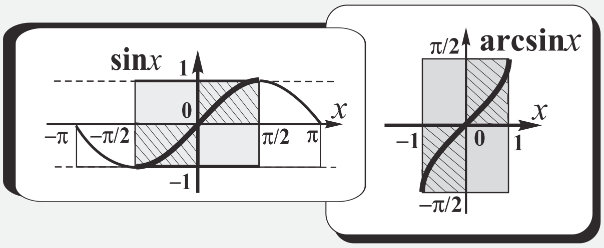
$$\Downarrow$$

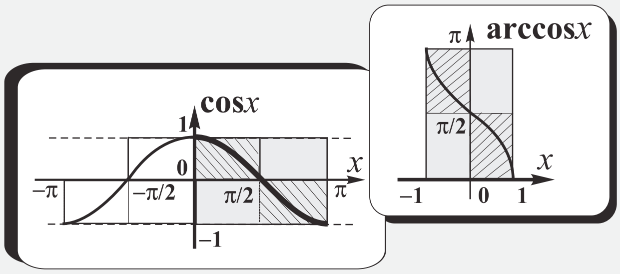
$$\boxed{(\mathbf{arcctg}\,x)' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + x^{\mathbf{2}}}}$$

3 Тест. Найдите производную	$\frac{-2}{x^2+4x+5}$	$\frac{2}{1+4x^2}$	$\frac{1}{2(1+x^2)}$	$\frac{1}{1+2x^2}$	$\frac{-4}{4+x^2}$	$\frac{-4}{4x^2+4x+5}$
$[2\,\mathrm{arcctg}(x+2)]'$						
$[\mathrm{arctg}\,2x]'$						
$\left[2\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}\right]'$						
$\left[\frac{\mathrm{arctg}\,x+2}{2}\right]'$						
$\left[\mathrm{arcctg}\frac{1+2x}{2}\right]'$						

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

7 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ





ПРОИЗВОДНАЯ АРКСИНУСА

$$x = \sin y \quad \Leftrightarrow \quad y = \arcsin x$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \qquad -1 < x < +1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x'_y = \cos y = \quad \Leftrightarrow \quad y'_x = \frac{1}{\cos y} =$$

$$= \sqrt{1-\sin^2 y} = \qquad = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \sqrt{1-x^2} \qquad \Downarrow$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

1 Докажите, что

$$x = \cos y \quad \Leftrightarrow \quad y = \arccos x$$

$$0 < y < \pi \qquad -1 < x < +1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x'_y = \quad \Leftrightarrow \quad y'_x =$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Пример

$$[\arcsin(3x-2)]' =$$

$$= \underbrace{3\cdot[\arcsin(3x-2)]'_{3x-2}}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{12x-9x^2-3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x-3x^2-1}}$$

2 Докажите, что

$$\left[\frac{(\arcsin x)'}{(\arccos x)'}\right]' = 0$$

3 Докажите, что

$$\left[(\arcsin x)'\cdot(\arccos x)'\right]' = -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

4 Докажите, что

$$\frac{(\arcsin x)'}{(\mathrm{arctg}\, x)'} - \frac{(\arccos x)'}{(\mathrm{arcctg}\, x)'} = 0$$

5 Докажите, что

$$(\arcsin x \cdot \arccos x)' = \frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

6 Докажите, что

$$\left(\frac{\arccos x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \left[\arccos x - \arcsin x + \frac{x \cdot \arccos x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

7 Тест. Определите функцию, производная которой равна

	$\left(\sqrt{\arcsin x}\right)'$	$\left(\arcsin \frac{x}{2}\right)'$	$(\arcsin x)'$	$(2\arcsin x)'$	$(\arcsin 2x)'$	$\left(\arcsin^2 x\right)'$
$\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$						
$\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$						
$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$						
$\frac{\sqrt{\arcsin x}}{2\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$						
$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$						

8 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

$$\exists\, f'(x) \quad \exists\,[f'(x)]' \Rightarrow \underbrace{\left\{ \underbrace{[f(x)]'}_{\text{первая производная}} \right\}'}_{\text{производная от первой производной}} = \underbrace{[f(x)]'' = f''(x)}_{\text{вторая производная}}$$

Пример

$$(\mathrm{tg}x)'' = \left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]' = \underbrace{-\frac{2}{\cos^3 x}\cdot(-\sin x)}_{\text{мысленно}} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

1 Тест

Найдите 2-ю производную	−4	−2	−1	0	1	2	4
$\left(2x^2-x+1\right)''$							
$\left(x^2-2x+1\right)''$							
$\left(x-2x^2+1\right)''$							
$\left(x-x^2+2\right)''$							

2 Докажите, что $(\cos x)'' = -\cos x$

3 Докажите, что $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2}$

4 Докажите, что $\left(\dfrac{\mathbf{a}^x}{\ln \mathbf{a}}\right)'' = \mathbf{a}^x \ln \mathbf{a}$

5 Докажите, что $\left(\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2} + \mathbf{p}\,x\right)'' = \mathbf{k}$

6 Докажите, что $\left(\dfrac{x^{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{n}+1}\right)'' = \mathbf{n}\cdot\dfrac{x^{\mathbf{n}}}{x}$

7 Докажите, что $(\mathrm{arctg}\, x)'' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

$$\text{Если } \exists\left[f(x)\right]^{(n-1)} \text{ и } \exists\left(\left[f(x)\right]^{(n-1)}\right)' \Rightarrow \left\{\underbrace{\left[f(x)\right]^{(n-1)}}_{(n-1)\text{-я производная}}\right\}' = \boxed{\underbrace{\left[f(x)\right]^{(n)}}_{n\text{-я производная}}}$$

Так обозначают производные высших порядков

Пример

$y=\dfrac{1}{x}$

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = (-1)\cdot\frac{1}{x^{1+1}}$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(-\frac{2}{x^3}\right) = (-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2}{x^{2+1}}$$

$$y''' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 2\cdot\left(-\frac{3}{x^4}\right) = (-1)^3\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^{3+1}}$$

1 Докажите, что

$$\left(x^{\mathbf{n}}\right)^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}-1)\cdot(\mathbf{n}-2)\cdot\ \cdots\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Доказательство можно провести на конкретных примерах

ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ

$$y' = \left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x\cdot\ln\mathbf{a}$$

$$y'' = \left(\mathbf{a}^x\cdot\ln\mathbf{a}\right)' = \ln\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x\cdot\ln^2\mathbf{a}$$

$$y''' = \left(\mathbf{a}^x\cdot\ln^3\mathbf{a}\right)' = \ln^2\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x\cdot\ln^3\mathbf{a}$$

$$y^{(4)} = \left(\mathbf{a}^x\cdot\ln^4\mathbf{a}\right)' = \ln^3\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x\cdot\ln^4\mathbf{a}$$

....

$$y^{(\mathbf{n})} = \left(\mathbf{a}^x\cdot\ln^{\mathbf{n}-1}\mathbf{a}\right)' = \ \cdots\ = \mathbf{a}^x\cdot\ln^{\mathbf{n}}\mathbf{a}$$

2 Докажите, что

$$\left(\log_{\mathbf{a}}x\right)^{(4)} = -\frac{\ln^2\mathbf{a}}{\mathbf{a}^x}$$

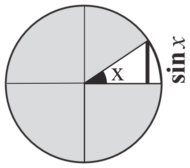
Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

9 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СИНУСА

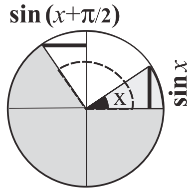
$$y=\sin x \to y^{(4)}=\sin x \to y^{(8)}=\sin x \to \cdots$$
$$y'=\cos x \to y^{(5)}=\cos x \to y^{(9)}=\cos x \to \cdots$$
$$y''=-\sin x \to y^{(6)}=-\sin x \to y^{(10)}=-\sin x \to \cdots$$
$$y'''=-\cos x \to y^{(7)}=-\cos x \to y^{(11)}=-\cos x \to \cdots$$

$y=\sin x$



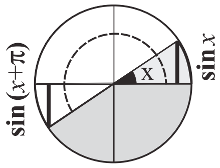
$y=\sin\left(x+0\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$



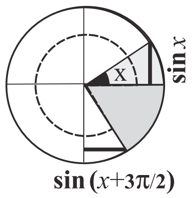
$y'=\sin\left(x+1\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y''=-\sin x=\sin(x+\pi)$



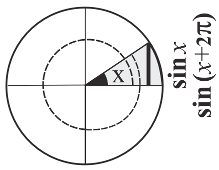
$y''=\sin\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y'''=-\cos x=\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$



$y'''=\sin\left(x+3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y^{IV}=\sin x=\sin(x+2\pi)$



$y^{IV}=\sin\left(x+4\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

....

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

4	Докажите, что	$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y=\cos x$
$y'=-\sin x=$
$y''=-\cos x=$
$y'''=\sin x=$
$y^{IV}=\cos x=$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Заполните таблицу производных

Дифференцирование

$f''(x) = g'(x)$ ←	$f'(x) = g(x)$ ←	$f(x)$
		$k\frac{x^2}{2} + px$
		$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
		$\ln x$ $(x>0)$
		$\log_a x$ $(x>0)$
		$\frac{a^x}{\ln a}$
		e^x
		$\sin x$
		$\mathrm{tg}\, x$
		$\mathrm{ctg}\, x$
		$\mathrm{arc\,tg}\, x$ $-\mathrm{arc\,ctg}\, x$
		$\arcsin x$ $-\arccos x$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Информационная схема

«ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ»

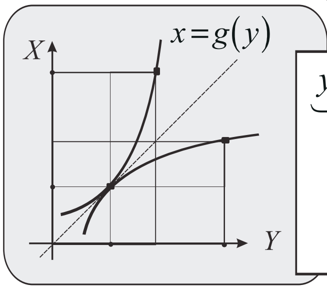
Производная степени

$$\left(x^n\right)' = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n$$

Производная функции в степени

$$\left[f^n(x)\right]' = n \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot f^n(x)$$

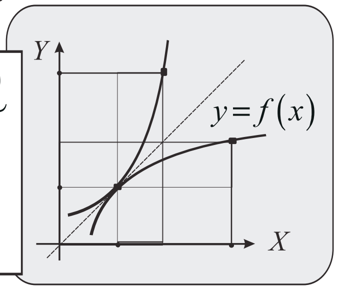
Связь между производными взаимно обратных функций



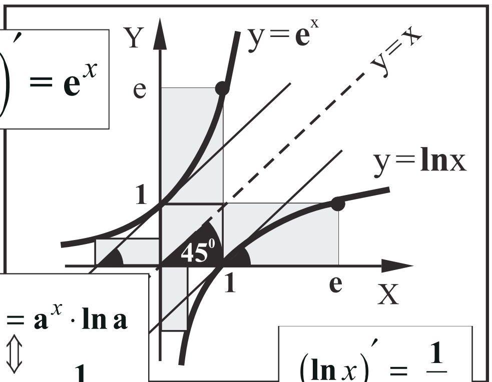
$$\underbrace{y=f(x) \text{ и } x=g(y)}_{\text{взаимно обратные функции}}$$

$$\Downarrow$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$



$$\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x$$



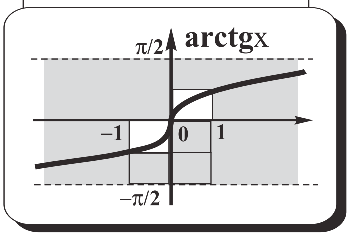
$$\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x \cdot \mathbf{ln\,a}$$

$$\Updownarrow$$

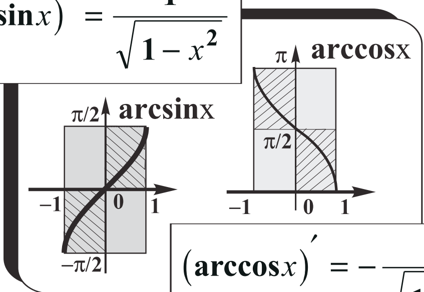
$$\left(\mathbf{log_a}x\right)' = \frac{1}{x \cdot \mathbf{ln\,a}}$$

$$\left(\mathbf{ln}\,x\right)' = \frac{1}{x}$$

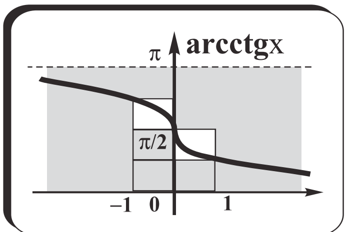
$$\left(\mathbf{arctg}x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$



$$\left(\mathbf{arcsin}x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$\left(\mathbf{arccos}x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$\left(\mathbf{arcctg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $\left[\cos^3(4-2x)\right]' =$
2. $\left[e^{3x+7}\right]' =$
3. $\left[3^x \cdot e^{\frac{x}{\ln 3}}\right]' =$
4. $\left[3^x \cdot \log_3(x-3)\right]' =$
5. $\left[\dfrac{\operatorname{arcctg} 3x - 3}{3}\right]' =$
6. $\left[\arccos^2(1-2x)\right]' =$
7. $\dfrac{f''(x)}{f'(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$
   $f(x) =$

Вариант 2

1. $\left[\dfrac{8/3}{\operatorname{ctg}^3(-8x)}\right]' =$
2. $\left[\dfrac{\left(e^x\right)^7}{7}\right]' =$
3. $\left[e^{\ln 8^{2x-5}}\right]' =$
4. $\left[\dfrac{\ln 2x}{e^{x/2}}\right]' =$
5. $\left[\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 3x}\right]' =$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}\cdot\left[\arcsin(x-1)\right]'} =$
7. $f''(x) = 4$
   при $f(1) = 5$
   $f(x) =$

Вариант 3

1. $\left[\dfrac{x}{\sqrt{\operatorname{tg}(4x+1)}} + \sqrt{\operatorname{tg}(4x+1)}\right]' =$
2. $\left[\dfrac{e^{6-x}}{\sqrt{e^x}}\right]' =$
3. $\left[\dfrac{e^{\left(x^2-3x\right)'}}{\left(x^2-3x^4\right)'_{x^2}}\right]'_{2x} =$
4. $\left[\dfrac{\ln 7\cdot 7^{(5-7x)}}{7\cos(5-7x)}\right]' =$
5. $z = y\cdot\sin x - a^x\cdot\cos y$
   $z'_x =$ $\quad(y = \text{const})$
   $z'_y =$ $\quad(x = \text{const})$
6. $\dfrac{\left[\operatorname{arctg}(3x-4)\right]'}{\left[\operatorname{arcctg}(4-3x)\right]'} =$
7. $-\left[f\left(x^2\right)\right]'_{x^2} = f''(x)$
   $f(x) =$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ОТВЕТЫ

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Тренажер

С. 48, № 2		С. 49, № 3		С. 49, № 4		С. 50, № 1	
1	$\frac{1}{2x}$	1	$4x-3$	1	x^4	1	$-\frac{n\cdot f'(x)}{f^{n+1}(x)}$
2	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	2	$\sin\frac{1}{2x-1}$	2	$\frac{x+1}{x+2}$	2	$\frac{\sqrt[n]{f(x)}\cdot f'(x)}{n\cdot f(x)}$
3	$\frac{1}{x^2}$	3	$\sin(2x-1)$	3	$\frac{1}{(x+1)^2}$	3	$-\frac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)}\cdot f(x)}$
4	x	4	$\frac{1}{2\sin x-1}$	4	$\frac{1}{x^2+1}$	4	$\frac{k\cdot\sqrt[n]{f^k(x)}\cdot f'(x)}{n\cdot f(x)}$
						5	$-\frac{k\cdot f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f^k(x)}\cdot f(x)}$

Тренажер

С. 51, № 2		С. 55, № 2		С. 55, № 3		С. 57, № 2	
1	$-\sin 2x$	1	$3^x\ln 3$	1	e^x	1	$\frac{5}{x\ln 5}$
2	$4\sin^3 x\cos x$	2	$5^x x^4(x\ln 5+5)$	2	$e^3\cdot 3^x\ln 3$	2	$-\frac{1}{x}$
3	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	3	$7^{7x}\ln 7$	3	$\frac{4^x(\ln 4-1)}{e^x}$	3	$\frac{-1}{x\ln^4 x}$
4	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	4	$-7\cdot 2^{5-7x}\ln 2$	4	$8\cdot 2^{8x}\cdot\ln 2$	4	$\frac{1}{2^x}\left(\frac{1}{x\ln 2}-\ln x\right)$
		5	$-\frac{1}{e^{5x}}$	5	$-\frac{\ln 4}{4^x}-\frac{4}{x^5}$		

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

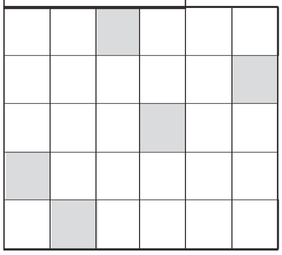
ОТВЕТЫ

Серия

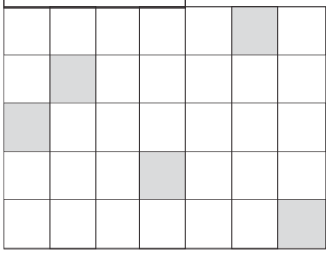
	С. 51, № 5
1	$\dfrac{\sin 2x}{2}$
2	$\dfrac{8\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$
3	$\dfrac{2}{\sin^2(2x)\cdot \operatorname{tg}^3(2x)}$
4	$\dfrac{\sqrt{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}}{4\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right)}$

Тест

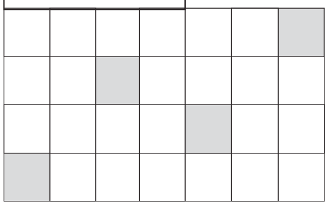
С. 48, № 1



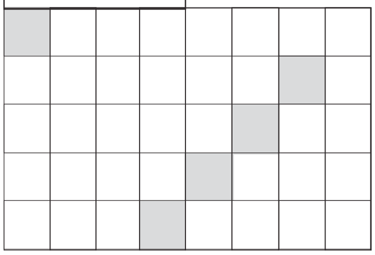
С. 49, № 5



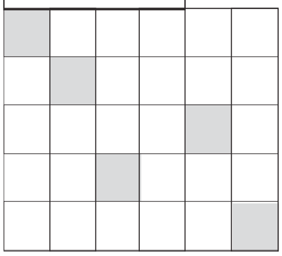
С. 54, № 1



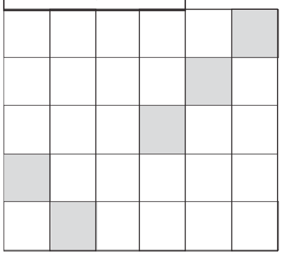
С. 57, № 4



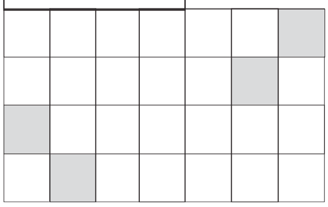
С. 59, № 3



С. 61, № 7



С. 62, № 1



Задачи на доказательство

С. 49, № 6

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=$$

С. 49, № 7

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\ldots$$

Зачет

Найдите производную

1 $\left[\mathbf{k}-\mathbf{p}\cdot f(x)\right]' =$

2 $\left[v\cdot\frac{u}{p}\right]' =$

3 $\left[\frac{u}{p}-\frac{p}{u}\right]' =$

4 $f'\left(x^{-1}\right) =$

5 $\left[\mathbf{e}^{x^2}+\mathbf{e}\cdot x^4\right]'_{x^2} =$

6 $\left[\sin^4 x^2\right]'_{x^{1/2}} =$

7 $\left[\frac{x^4}{4}-\ln x^4\right]'_{x^8} =$

8 $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8\cdot\operatorname{ctg}(2x-1)}}\right]' =$

9 $\left[\frac{1}{\arccos x}+\frac{1}{\arcsin(-x)}\right]' =$

10 $\left[\frac{\ln \mathbf{e}^x\cdot\sin x}{\cos x\cdot x^2}\right]' =$

11 $(\sin x)''_{\sin x} =$

12 $(\cos x\cdot\sin x)''_{2x} =$

13 $\left(\operatorname{ctg}^2 x\right)''_{\operatorname{ctg}x} =$

14 Определите структуру функции $g\left[f(x)\right]$ по ее производной $g'_x=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

15 Составьте функцию $y=\sqrt{4-x}$ с аргументом $\frac{4}{\sqrt{x}}$ и найдите ее производную

16, **17** Докажите, что

$1-\cos 2x = 2\cdot\left[(\cos x)'\right]^2$

$\operatorname{ctg}^2 x = (-\operatorname{ctg}x)'-1$

18, **19** Для функции

$$z=\frac{\ln y}{\cos x}-\frac{1}{\sqrt{y}\sin x}$$

18 найдите z'_x при условии, что $y=\text{const}$

19 найдите z'_y при условии, что $x=\text{const}$

Использованная литература

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл.сред. шк.– М.: Просвещение, 1991.

2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебн. пособие для вузов.– 7-е изд., испр.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

3. Резник Н.А. Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум. Вып. I. Начальные представления о технике интегрирования Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. - 80 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

СОДЕРЖАНИЕ

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ 3

ТИЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ 21

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ 47

Зачет 70

Использованная литература 71