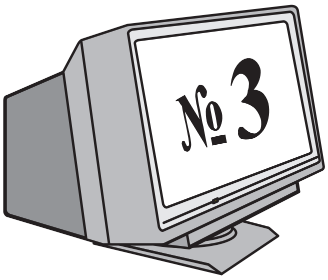
Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.



Производная сложной функции

1

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

$$\boxed{\left[f^2(x)\right]'} = \left[f(x)\cdot f(x)\right]' =$$

$$= f'(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x) = \boxed{\mathbf{2}\,\frac{f^{\mathbf{2}}(x)}{f\ (x)}\cdot f'(x)}$$

$$\boxed{\left[f^3(x)\right]'} = \left[f^2(x)\cdot f(x)\right]' =$$

$$= \underbrace{\mathbf{2}\,f(x)f'(x)}_{\left[f^{\mathbf{2}}(x)\right]'}\cdot f(x) + f^{\mathbf{2}}(x)\cdot f'(x) = \boxed{\mathbf{3}\,\frac{f^{\mathbf{3}}(x)}{f\ (x)}\cdot f'(x)}$$

$$\boxed{\left[f^4(x)\right]'} = \left[f^3(x)\cdot f(x)\right]' =$$

$$= \underbrace{\mathbf{3}f^{\mathbf{2}}(x)f'(x)}_{\left[f^{\mathbf{3}}(x)\right]'}\cdot f(x) + f^{\mathbf{3}}(x)\cdot f'(x) = \boxed{\mathbf{4}\,\frac{f^{\mathbf{4}}(x)}{f\ (x)}\cdot f'(x)}$$

. . . .

$$\boxed{\left[f^{\mathbf{n}}(x)\right]'} = \left[f^{\mathbf{n-1}}(x)\cdot f(x)\right]' =$$

$$= \quad \cdots \quad + \quad \cdots \quad = \boxed{\mathbf{n}\,\frac{f^{\mathbf{n}}(x)}{f\ (x)}\cdot f'(x)}$$

1 Докажите, что

$$\left[f^{\mathbf{n}}(x)\right]' = \mathbf{n}\,\frac{f^{\mathbf{n}}(x)}{f\ (x)}\cdot f'(x)$$

(методом математической индукции при $\mathbf{n}\in\mathbf{N}$)

Аналогично можно рассматривать производные функций в рациональной степени

Пример $y=\sqrt{x}-\mathbf{1}$

Составим функцию с аргументом $x/\mathbf{4}$, и найдем ее производную

Пример $y=\sqrt{x-\mathbf{1}}$

Решение

$$y\left(\frac{x}{\mathbf{4}}\right) = \sqrt{\frac{x}{\mathbf{4}}}-\mathbf{1} = \frac{\sqrt{x}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$$

$$y'\left(\frac{x}{\mathbf{4}}\right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\mathbf{2}} = \frac{\sqrt{x}}{\mathbf{4}x}$$

Решение

$$y\left(\frac{x}{\mathbf{4}}\right) = \sqrt{\frac{x}{\mathbf{4}}-\mathbf{1}} = \sqrt{\frac{x-\mathbf{4}}{\mathbf{4}}} = \frac{\sqrt{x-\mathbf{4}}}{\mathbf{2}}$$

$$y'\left(\frac{x}{\mathbf{4}}\right) = \left(\frac{\sqrt{x-\mathbf{4}}}{\mathbf{2}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x-\mathbf{4}}\right)'}{\mathbf{2}} = \frac{\sqrt{x-\mathbf{4}}}{\mathbf{4}(x-\mathbf{4})}$$

Производная сложной функции

1 Тренажер

Заполните пропуски в таблице производных функций в степени

$f(x) \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow f'(x)$

	$f^{\mathbf{n}}(x)$	$\mathbf{n}\cdot f^{\mathbf{n}}(x)\cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = \mathbf{n}\cdot f^{\mathbf{n-1}}(x)\cdot f'(x)$
1	$\frac{\mathbf{1}}{f^{\mathbf{n}}(x)}$	$-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{1}}{f^{\mathbf{n}}(x)}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\mathbf{n}\cdot\square}{f^{\mathbf{n+1}}(x)}$
2	$\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\cdot\square\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}\cdot\square}{\mathbf{n}\cdot\square}$
3	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}}$	$\square\cdot\square\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\square}{\mathbf{n}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}\cdot\square}$
4	$\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}$	$\square\cdot\square\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}\cdot\square}{\mathbf{n}\cdot\square}$
5	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}}$	$\square\cdot\square\cdot\square = \square$

2 Тренажер

Найдите $\left[f^{2}(x)\right]'$ для

1 $f(x)=\mathbf{cos}\,x$	2 $f(x)=\mathbf{sin}^{\mathbf{2}}x$	3 $f(x)=\sqrt{\mathbf{ctg}\,x}$	4 $f(x)=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{sin}\,x}}$

3 Серия

Найдите производную

1 $\left(\frac{\mathbf{sin}^{\mathbf{2}}x}{\mathbf{2}}\right)'$	2 $\left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{cos}^{\mathbf{2}}x}\right]'$	3 $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6tg}^{\mathbf{2}}x}\right)'$	4 $\left(\sqrt{\mathbf{8}\,\mathbf{sin}\,x}\right)'$

2

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

Доказательство

$$\underbrace{f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}_{\text{аргумент функции}} \underbrace{=}_{\text{заменим}} \underbrace{f(z)}_{\text{единый символ}}, \text{ где } z=\mathbf{k}x+\mathbf{p}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta z = \left[\mathbf{k}(x+\Delta x)+\mathbf{p}\right]-(\mathbf{k}x+\mathbf{p})=\mathbf{k}\cdot\Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x=\frac{\Delta z}{\mathbf{k}}$$

1

$$\Delta f(z)=$$
$$=f\left[\mathbf{k}(x+\Delta x)+\mathbf{p}\right]-f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})=$$
$$=f\left[(\mathbf{k}x+\mathbf{p})+\mathbf{k}\Delta x\right]-f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})=$$
$$=f(z+\Delta z)-f(z)=$$

2

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(z)}{\frac{\Delta z}{\mathbf{k}}}=\mathbf{k}\cdot\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

3

$$\boxed{\left[f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]'}=\left[f(z)\right]'=$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\mathbf{k}\cdot\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\mathbf{k}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left[z+\Delta z\right]-f(z)}{\Delta z}}_{f'(z)}=$$
$$=\boxed{\mathbf{k}\cdot f'(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}$$

Пример

$$\left[\sin(3x-5)\right]'=$$
$$\underbrace{=3\cdot\cos\underbrace{(3x-5)}_{\text{при сохранении аргумента}}}_{\text{сразу результат}}$$

$$\left[f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]'=$$
$$=\mathbf{k}\cdot\underbrace{f'\underbrace{(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}_{\text{при заданном аргументе}}}_{\text{производная функции}}$$

Пример

$$\left[\mathrm{tg}(5x+3)\right]'=$$
$$\underbrace{=5\cdot\frac{1}{\cos^2\underbrace{(5x+3)}_{\text{при сохранении аргумента}}}}_{\text{сразу результат}}$$

Производная сложной функции

1 Серия. Составьте для заданной функции формулу $f(x+\Delta x)-f(x)$

1	2	3	4
$y=\cos 2x$	$y=\dfrac{1}{\cos x}$	$y=\sqrt{\cos x}$	$y=x\cdot\cos x$

2 Тест. Найдите производную

производную	$2e\cdot x^{2e-1}$	x^{2e}	e^{x-2}	e^{x}	$2e^{x}$	e^{2x}	$2e^{2x}$
$\left(e^{2x}\right)'$							
$\left(e^{x-2}\right)'$							
$\left(2e^{x}\right)'$							
$\left(x^{2e}\right)'$							

3 Выберите ответ

$$\left[f(\mathbf{k}x)\right]' =$$

А	$\mathbf{k}\cdot f'(\mathbf{k}x)'$
Б	$\mathbf{k}\cdot f'(\mathbf{k}x)$
В	$\mathbf{k}\cdot f\left[(\mathbf{k}x)'\right]$
Г	$\mathbf{k}\cdot\left[f(\mathbf{k}x)\right]'$

4 Тренажер. Найдите производную

1	2	3	4
$\left[(3x+2)^5\right]'$	$\left(\sqrt{3x+2}\right)'$	$\left[3^{5x-2}\right]'$	$\left[\cos(3-2x)\right]'$

5 Тест

Определите производную	$3\cos 3x$	$\cos 3x$	$3\cos x$	$\dfrac{1}{3}\cos x$	$\cos\dfrac{x}{3}$	$3\cos\dfrac{x}{3}$	$\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}$
$(\sin 3x)'$							
$\left(\dfrac{\sin 3x}{3}\right)'$							
$\left(3\sin\dfrac{x}{3}\right)'$							
$\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)'$							

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

3

Производная сложной функции

НЕЗАВИСИМАЯ ПЕРЕМЕННАЯ И АРГУМЕНТ ФУНКЦИИ

Договоримся отличать в структуре сложной функции независимую переменную от ее аргумента:

Пример

$$f(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}) = \underbrace{\left[\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}\right]^{2n}}_{\text{функция от } x}$$

$$f(\overbrace{x^2}^{\text{аргумент}}) = \underbrace{\left[\overbrace{x^2}^{\text{аргумент}}\right]^{n}}_{\text{функция от } x^2}$$

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ ПРОИЗВОДНОЙ

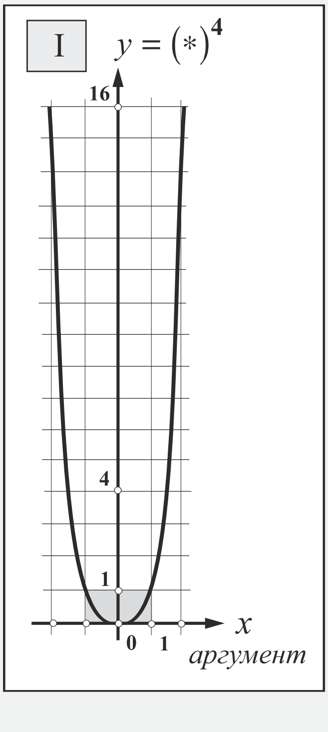
Если дифференцирование функции $f(x)$ ведется по независимой переменной x, то пишут

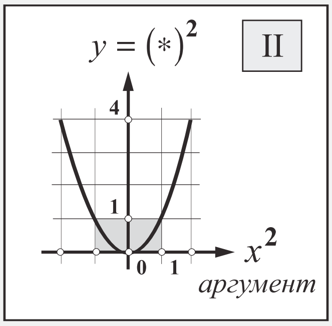
$$\underbrace{[f(x)]' \ \text{или} \ f'(x)}_{\textit{без указания переменной дифференцирования}}$$

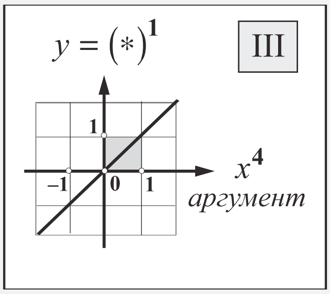
Если дифференцирование функции $f(*)$ ведется по аргументу $*$, то пишут

$$\underbrace{f'_*(*) \ \text{или} \ [f(*)]'_*}_{\textit{с указанием аргумента дифференцирования}}$$

Пример Определим аргумент каждой из заданных функций







Р е ш е н и е

I $y = (\underbrace{x}_{\text{аргумент}})^4$

II $y = (\underbrace{x^2}_{\text{аргумент}})^2$

III $y = (\underbrace{x^4}_{\text{аргумент}})^1$

Производная сложной функции

Пример

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x}} = \boxed{\begin{array}{c} x^4=(x)^4 \Leftarrow \boxed{x=*} \\ \Downarrow \\ \underbrace{\left(*^4\right)' = 4(*)^3}_{\textit{мысленно}} \end{array}} = 4x^3$$

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x^2}} = \boxed{\begin{array}{c} x^4=\left(x^2\right)^2 \Leftarrow \boxed{x^4=*} \\ \Downarrow \\ \underbrace{\left[(*)^2\right]' = 2*}_{\textit{мысленно}} \end{array}} = 2x^2$$

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x^4}} = \boxed{\begin{array}{c} x^4=\left(x^4\right)^1 \Leftarrow \boxed{x^4=*} \\ \Downarrow \\ \underbrace{\left[*\right]' = 1}_{\textit{мысленно}} \end{array}} = 1$$

1 Серия	Заполните пропуски в примерах и оформите конечный результат
1	$\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'_{\frac{1}{x}} = \left[\left(\boxed{}\right)^{\frac{1}{4}}\right]'_{\frac{1}{x}} =$ ☚ $\boxed{\left(*^4\right)'_* = 4\cdot *^3}$ ☞ $= 4\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$
2	$\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\left(\boxed{}\right)^{4}\right]'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} =$ ☚ $\boxed{\left(*^4\right)'_* = 4\cdot *^3}$ ☞ $= 4\cdot\left(\quad\right)^3$
3	$\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)'_{\sqrt[4]{x}} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{}}}\right]'_{\sqrt[4]{x}} =$ ☚ $\boxed{\left(\dfrac{1}{\sqrt{*}}\right)'_* = \qquad}$ ☞
4	$\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'_{\sqrt[8]{x}} = \left[\dfrac{1}{\left(\sqrt[8]{x}\right)^{\boxed{}}}\right]'_{\sqrt[8]{x}} =$ ☚ $\boxed{\qquad}$ ☞

2 Тренажер Найдите производную

1	2	3
$\left[\cos\sin(x)\right]'_{\cos\sin(x)}$	$\left[\cos(\sin x)\right]'_{\sin x}$	$\left[\cos(\sin x)\right]'_{x}$

4

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'_x = f'_{g(x)}\left[g(x)\right]\cdot g'_x(x)$$ *План дифференцирования*

$$\boxed{\left\{f\left[g(x)\right]\right\}' = f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)}$$ *Традиционное оформление*

Пример Найдите производную $\left(\mathbf{tg\,e}^x\right)'$

А н а л и з

$$\mathbf{tg\,e}^x = \underbrace{\mathbf{tg}\underbrace{\left(\mathbf{e}^x\right)}_{\mathrm{II}}}_{\mathrm{I}} \Rightarrow \left(\mathbf{tg\,e}^x\right)'_x = \underbrace{\left[\mathbf{tg}\left(\mathbf{e}^x\right)\right]'_{\mathbf{e}^x}}_{(\mathrm{I})'}\cdot\underbrace{\left(\mathbf{e}^x\right)'_x}_{(\mathrm{II})'}$$

Р е ш е н и е

$$\left(\mathbf{tg\,e}^x\right)'_x = \frac{1}{\cos^2 \mathbf{e}^x}\cdot\mathbf{e}^x = \frac{\mathbf{e}^x}{\cos^2\mathbf{e}^x}$$

Посмотрите и сравните!

Пример Найдите производную $\left(\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}\right)'$

А н а л и з

$$\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x} = \underbrace{\mathbf{e}^{\overbrace{(\mathbf{tg}\,x)}^{\mathrm{II}}}}_{\mathrm{I}} \Rightarrow \left(\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}\right)'_x = \underbrace{\left[\mathbf{e}^{(\mathbf{tg}\,x)}\right]'_{\mathbf{tg}\,x}}_{(\mathrm{I})'}\cdot\underbrace{\left(\mathbf{tg}\,x\right)'_x}_{(\mathrm{II})'}$$

Р е ш е н и е

$$\left(\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}\right)'_x = \mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{tg}\,x}}{\cos^2 x}$$

1 Тренажер	Определите количество множителей, составляющих результат дифференцирования заданной функции		
1 $\left(\sin^2 x\right)'$	2 $\left(2\cos x^2\right)'$	3 $\left(\sin^2\cos^2 2x\right)'$	4 $\left(\sin^2\sqrt{\cos x^2}\right)'$

2 Тренажер	Составьте $g'\left[f(x)\right]\cdot f'(x)$ для заданной $g\left[f(x)\right]$		
1 $\sin f(x)$	2 $\cos f(x)$	3 $\mathrm{tg}\, f(x)$	4 $\mathrm{ctg}\, f(x)$

Производная сложной функции

Пример Продифферуцируем функцию $y = \sin \operatorname{tg}\sqrt{x}$ по всем возможным аргументам

А н а л и з

Общий порядок дифференцирования

$$\underbrace{\sin\left\{\underbrace{\operatorname{tg}\left[\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{III}}\right]}_{\text{II}}\right\}}_{\text{I}}$$

Возможные аргументы: $\operatorname{tg}\sqrt{x}$, $\sqrt{x}$, x

Р е ш е н и е

$$\left(\sin\left\{\operatorname{tg}\sqrt{x}\right\}\right)'_{\operatorname{tg}\sqrt{x}} = \underbrace{\sin'_{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\left\{\operatorname{tg}\sqrt{x}\right\}}_{\text{план дифференцирования}} =$$

$$= \cos\left\{\operatorname{tg}\sqrt{x}\right\} = \cos\operatorname{tg}\sqrt{x}$$

$$\left(\sin\left\{\operatorname{tg}\left[\sqrt{x}\right]\right\}\right)'_{\sqrt{x}} = \underbrace{\sin'_{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\left\{\operatorname{tg}\left[\sqrt{x}\right]\right\}\cdot \operatorname{tg}'_{\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}\right]}_{\text{план дифференцирования}} =$$

$$= \cos\operatorname{tg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} = \frac{\cos\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sin\left\{\operatorname{tg}\left[\sqrt{x}\right]\right\}\right)'_{x} = \underbrace{\sin'_{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\left\{\operatorname{tg}\left[\sqrt{x}\right]\right\}\cdot \operatorname{tg}'_{\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}\right]\cdot\left[\sqrt{x}\right]'}_{\text{план дифференцирования}} =$$

$$= \cos\operatorname{tg}x \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\operatorname{tg}x}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

3 Тест Определите производную	$\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}$	$\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}$	$2\sin x$	$\sin 2x$	$\cos\frac{1}{x}$
$\left(\sin^2 x\right)'_{\sin x}$							
$\left(\sqrt{\cos x}\right)'_{\cos x}$							
$\left(\sin\frac{1}{x}\right)'_{\frac{1}{x}}$							
$\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)'_{\sqrt{x}}$							

5

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ

АРКСИНУСА	**АРККОСИНУСА**

Производную арксинуса | арккосинуса можно найти, используя известные тождества:

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \cos(\arccos x) = x$$

Продифференцируем обе части равенства, рассматривая их левые части как сложные функции:

$$\left[\sin(\arcsin x)\right]'_x = (x)'_x \qquad \left[\cos(\arccos x)\right]'_x = (x)'_x$$

Так как

$$\underbrace{\left[\sin(\arcsin x)\right]'_{\arcsin x} \cdot (\arcsin x)'_x = 1}_{\text{мысленно}} \qquad \underbrace{\left[\cos(\arccos x)\right]'_{\arccos x} \cdot (\arccos x)'_x = 1}_{\text{мысленно}}$$

то

$$\left[\cos(\arcsin x)\right] \cdot (\arcsin x)' = 1 \qquad -\sin(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1$$

Следовательно

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

Поскольку

$$\boxed{\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}} \qquad \boxed{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

имеем:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\underbrace{\sin^2(\arcsin x)}_{x^2}} \qquad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-\underbrace{\cos^2(\arccos x)}_{x^2}}$$

Отсюда:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Пример

$$\left[\arcsin(3x-2)\right]' =$$

$$= \underbrace{\left[\arcsin(3x-2)\right]'_{3x-2} \cdot (3x-2)'_x}_{\text{мысленно}} = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{12x-9x^2-3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x-3x^2-1}}$$

Производная сложной функции

1 Докажите, что

$$\left(\arcsin x\cdot\arccos x\right)'=\frac{\arccos x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2 Докажите, что

$$\left[\arcsin(\mathrm{k}x)\right]'=\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{1-(\mathrm{k}x)^2}}$$

3 Докажите, что

$$\left[\arccos\frac{x}{\sqrt{\mathrm{k}}}\right]'=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{k}-x^2}}$$

4 Серия. Найдите производную

1	2	3	4
$\left(\dfrac{\arccos 3x}{3}\right)'$	$\left(\arccos\dfrac{x}{3}\right)'$	$\left(\arccos^3 x\right)'$	$\left(\sqrt{\arccos x}\right)'$

5 Тест. Определите функцию, производная которой

равна	$\left(\sqrt{\arcsin x}\right)'$	$\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)'$	$\left(2\arcsin x\right)'$	$\left(\arcsin 2x\right)'$	$\left(\arcsin^2 x\right)'$
$\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$					
$\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$					
$\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$					
$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$					

6

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ

АРКТАНГЕНСА		**АРККОТАНГЕНСА**
	Производную	
арктангенса		арккотангенса
	можно найти, используя известные тождества:	
$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x$		$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,x)=x$
	Продифференцируем обе части равенства, рассматривая их левые части как сложные функции:	
$[\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)]'_x=(x)'_x$		$[\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,x)]'_x=(x)'_x$
	Так как	
$\underbrace{[\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)]'_{\mathrm{arctg}\,x}\cdot(\mathrm{arctg}\,x)'_x=1}_{\text{мысленно}}$		$\underbrace{[\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,x)]'_{\mathrm{arcctg}\,x}\cdot(\mathrm{arcctg}\,x)'_x=1}_{\text{мысленно}}$
	то	
$\dfrac{1}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)}\cdot(\mathrm{arctg}\,x)'=1$		$-\dfrac{1}{\sin^2(\mathrm{arcctg}\,x)}\cdot(\mathrm{arcctg}\,x)'=1$
	Следовательно	
$(\mathrm{arctg}\,x)'=\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)$		$(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\sin^2(\mathrm{arcctg}\,x)$
	Поскольку	
$\boxed{1+\mathrm{tg}^2x=\dfrac{1}{\cos^2x} \quad \cos^2x=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2x}}$		$\boxed{1+\mathrm{ctg}^2x=\dfrac{1}{\sin^2x} \quad \sin^2x=\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2x}}$
	имеем	
$\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)=\dfrac{1}{1+\underbrace{\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,x)}_{x^2}}$		$\sin^2(\mathrm{arcctg}\,x)=\dfrac{1}{1+\underbrace{\mathrm{ctg}^2(\mathrm{arcctg}\,x)}_{x^2}}$
	Отсюда	
$\boxed{(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}}$		$\boxed{(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}}$

Пример $[\mathrm{arctg}(4x-1)]'=$

$$=\underbrace{[\mathrm{arcrtg}(4x-1)]'_{4x-1}\cdot(4x-1)'_x}_{\text{мысленно}}=\frac{4}{1+(4x-1)^2}=$$

$$=\frac{4}{16x^2-8x+2}=\frac{2}{8x^2-4x+1}$$

Производная сложной функции

1 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\left(\dfrac{\mathbf{arctg}\sqrt{5}\,x}{5}\right)'$	$\left(\sqrt{x}\,\mathbf{arctg}\dfrac{x}{3}\right)'$	$\left(\mathbf{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$	$\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}-\mathbf{arctg}\,x\right)'$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

$$\left.\begin{array}{l}]\, y=f(x)\in C'[D(f)] \\ x=\varphi(y)\in C'[E(f)] \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

Доказательство

$]\,\exists\, f'(x)=y'_x\neq 0$

$]\,\Delta y\neq 0\to\Delta x=\Delta\varphi(y)\neq 0$

Так как $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\Downarrow$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Пример Найдем производную функции $y=\mathbf{arctg}\,x$ по теореме о производной обратной функции

Решение

$$y=\mathbf{arctg}\,x \Leftrightarrow x=\mathbf{tg}\,y$$

где

$$x\in(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{tg}\,y)' = x'_y=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\underbrace{\mathbf{tg}^2 y}_{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{arctg}\,x)' = y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1+x^2}$$

2 Докажите, что по теореме о производной обратной функции

$$(\mathbf{arcctg}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

3 Докажите, что

$$\frac{(\mathbf{arcsin}\,x)'}{(\mathbf{arctg}\,x)'}-\frac{(\mathbf{arccos}\,x)'}{(\mathbf{arcctg}\,x)'}=0$$

4 Докажите, что

$$[\mathbf{arctg}\,f(x)]'=[-\mathbf{arcctg}\,f(x)]'$$

5 Докажите, что

$$\left[\frac{\mathbf{arctg}(\mathbf{k}x)}{\mathbf{k}}\right]'-\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{arctg}\left(\frac{x}{\mathbf{k}}\right)\right]'=\frac{x^2(1-\mathbf{k}^4)}{(1+\mathbf{k}^2x^2)(\mathbf{k}^2+x^2)}$$

7

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМА

Производную логарифма
можно найти с помощью
основного логарифмического тождества

$$\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} x} = x,$$

рассматривая его левую часть, как сложную функцию:

$$\left(\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} x}\right)'_x = \left(\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} x}\right)'_{\log_{\mathbf{a}} x} \cdot \left(\log_{\mathbf{a}} x\right)'_x$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(\ x\ )'_x}_{1} = \underbrace{\mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} x}}_{x} \ln \mathbf{a} \cdot \left(\log_{\mathbf{a}} x\right)' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\log_{\mathbf{a}} x\right)' = \frac{1}{x \ln \mathbf{a}}}$$

$$\forall\ \mathbf{a} > 0, \quad \mathbf{a} \neq 1, \quad \forall\ x \in \mathbf{R}$$

Отсюда: $\left(\ln_{\mathbf{e}} x\right)' = \dfrac{1}{x \ln_{\mathbf{e}} \mathbf{e}}$

То есть: $\boxed{\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}}$

Пример] $y = \ln \sin x$

$$y' = \underbrace{\left(\ln \sin x\right)_{\sin x} \cdot \left(\sin x\right)_x}_{\textit{мысленно}}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

Пример] $y = \log_5(3x + 2)$

$$y' = \underbrace{\left[\log_5(3x+2)\right]'_{3x+2} \cdot \left(3x+2\right)'_x}_{\textit{мысленно}}$$

$$= \frac{1}{(3x+2) \cdot \ln 5} \cdot 3 =$$

$$= \frac{3}{\ln 5 \cdot (3x+2)}$$

1 Серия — Найдите производную

1	2	3	4
$(2\ln x)'$	$[\ln(\mathbf{e}x)]'$	$\left[\ln\left(x - \sqrt{2}\right)\right]'$	$\left[\ln\left(\sqrt{2}x - \mathbf{e}\right)\right]'$

2 Серия — Найдите производную

1	2	3	4
$(\log_3 x)'$	$(7\log_7 x)'$	$(9\mathbf{e} \cdot \log_9 x)'$	$\left(\ln 3^3 \cdot \log_{27} x\right)'$

Производная сложной функции

3 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{d\left(\log_2 x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\log_{1/3} x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\log_{\sqrt{e}} x\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\log_3 x^3\right)}{dx}$

4 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\left(\ln\sin 2x\right)'$	$\left(\ln^2\sin x\right)'$	$\left(\ln\sin^2 x\right)'$	$\left(\ln^2\sin 2x\right)'$

5 Тест

Найдите производную	$7e^{7x}$	e^{7x}	$7e$	7	$7x^6$	$\dfrac{7e}{x}$	$\dfrac{7e^{7\ln x}}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{x}{7e}$
$\left(e^{7x}\right)'$									
$\left(\ln 7ex\right)'$									
$\left(7e\ln 7x\right)'$									
$\left(e^{7\ln x}\right)'$									
$\left(7\ln e^{x}\right)'$									

6 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\left(\sqrt{\ln\sqrt{x}}\right)'$	$\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\ln\sqrt{x}\right)'}$	$\left(\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\ln x}}\right)'$

7 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{d\left(\ln^2\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\sqrt{\ln\dfrac{1}{x^2}}\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\dfrac{1}{\ln^2\sqrt{x}}\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left(\dfrac{1}{\sqrt{\ln\sqrt{x}}}\right)}{dx}$

8

Производная сложной функции

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

$$\left]\, y = \ln\varphi(x):\ \exists\, \varphi'(x)\right.$$

$$y'_x = \left[\ln\varphi(x)\right]'_x = \frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad\Rightarrow\quad \overbrace{\left[\ln\varphi(x)\right]'}^{\text{Логарифмическая производная функции } \varphi(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

$$y = \frac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ \ldots\ \cdot f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ \ldots\ \cdot g_k(x)} \Rightarrow \ln y = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) + \ \ldots\ + \ln f_n(x) - \ln g_1(x) - \ln g_2(x) - \ \ldots\ - \ln g_k(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\ln y)' = \frac{y'}{y}} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \ldots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} - \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} - \ldots - \frac{g_k'(x)}{g_k(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y' = y\cdot(\ln y)'}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ \ldots\ \cdot f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ \ldots\ \cdot g_k(x)}\cdot\left(+\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \ldots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} - \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} - \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} - \ldots - \frac{g_k'(x)}{g_k(x)}\right)$$

Логарифмическая производная значительно упрощает нахождение производных дробно-рациональных и дробно-иррациональных функций

Пример Найдем производную функции $y = \dfrac{(x^7+6)(x^6+5)}{(x^5+4)(x^4+3)}$

Решение

$$y = \frac{(x^7+6)(x^6+5)}{(x^5+4)(x^4+3)} \Rightarrow \ln y = \ln\frac{(x^7+6)(x^6+5)}{(x^5+4)(x^4+3)} =$$

$$\Downarrow$$

$$= \ln(x^7+6) + \ln(x^6+5) - \ln(x^5+4) - \ln(x^4+3)$$

$$\boxed{(\ln y)' = \frac{y'}{y}} = \underbrace{\frac{7x^6}{(x^7+6)} + \frac{6x^5}{(x^6+5)} - \frac{5x^4}{(x^6+5)} - \frac{4x^3}{(x^6+5)}}_{\text{мысленно}}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{(x^7+6)(x^6+5)}{(x^5+4)(x^4+3)}\cdot\left[\frac{7x^6}{(x^7+6)} + \frac{6x^5}{(x^6+5)} - \frac{5x^4}{(x^6+5)} - \frac{4x^3}{(x^6+5)}\right]$$

Производная сложной функции

1 Серия Найдите производную функции

1 $y=\left(x^3-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)$	2 $y=\sqrt{3x-1}\cdot\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-1}$
3 $y=\dfrac{(3x+2)}{\sqrt{2x+3}\sqrt{3x-3}}$	4 $y=\dfrac{(1-3x)^2}{\sqrt[3]{3-x}\cdot\left(x^2-3\right)}$

Логарифмическая производная облегчает нахождение производных функций, представляющих собой комбинации различных элементарных функций

Пример Найдем производную функции $y=\dfrac{5^x\cdot\left(x^7+5\right)\cdot\arcsin 7x}{x^5\cdot(5x-7)}$

Решение

$$y = 5^x\cdot\left(x^7+5\right)\cdot\arcsin 7x\cdot\frac{1}{x^5}\cdot\frac{1}{5x-7}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln y=\ln\left[5^x\cdot\left(x^7+5\right)\cdot\arcsin 7x\cdot\frac{1}{x^5}\cdot\frac{1}{5x-7}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\ln y=\ln 5^x+\ln\left(x^7+5\right)+\ln\arcsin 7x-5\ln x-\ln(5x-7)$$

$$\Downarrow$$

$$(\ln y)'=\ln 5+\frac{7x^6}{x^7+5}+\frac{7}{\arcsin 7x\sqrt{1-49x^2}}-\frac{5}{x}-\frac{5}{5x-7}$$

Так как

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}$$

$$\Downarrow$$

$$y'=\frac{5^x\left(x^7+5\right)\arcsin 7x}{x^5(5x-7)}\cdot\left[\ln 5+\frac{7x^6}{x^7+5}+\frac{7}{\arcsin 7x\sqrt{1-49x^2}}-\frac{5}{x}-\frac{5}{5x-7}\right]$$

2 Серия Найдите производную функции

1 $y=\dfrac{e^x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x}{(1-x)\cdot\sin x}$	2 $y=\dfrac{\mathrm{tg}\,x\cdot\arccos x}{2^x\cdot x^2}$
3 $y=\dfrac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}\cdot\cos^2 x}{(ex-1)^2\cdot\pi^5}$	4 $y=\dfrac{\ln x^5\cdot\mathrm{arctg}(3x-1)}{\sqrt{2x-7}\cdot 4^{2x+1}}$

9

Производная сложной функции

ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМА ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Показательно-степенная функция

$$y = f(x)^{\varphi(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(\ln y)'}_{\frac{y'}{y}} = \underbrace{\left[\varphi(x) \cdot \ln f(x)\right]'}_{\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}} \Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}_{\text{производная логарифма показательно-степенной функции}}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

$$y = f(x)^{\varphi(x)} \Rightarrow y' = y \cdot \left[\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right] =$$

$$\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]' = f(x)^{\varphi(x)} \cdot \left[\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Пример

$$y = (\sin x)^x$$

$$\Downarrow$$

$$\ln y = x \cdot \ln\sin x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\sin x + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = y \cdot [\ln\sin x + x \cdot \operatorname{tg} x]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[(\sin x)^x\right]' = (\sin x)^x \cdot [\ln\sin x + x \cdot \operatorname{tg} x]$$

Формула производной логарифма показательно-степенной функции позволяет ускорить нахождение производной показательно-степенной функции

Пример

$$y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$\boxed{\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot (\ln x)'}$$

Производная логарифма заданной функции

$$\Downarrow$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{(1 - \ln x)}{x^2}$$

Производная сложной функции

1 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{d\left(x^{\mathbf{tg}\,x}\right)}{dx}$	$\dfrac{d\left[(\mathbf{cos}\,x)^x\right]}{dx}$	$\dfrac{d\left[(\mathbf{sin}\,x)^{\mathbf{arccos}\,x}\right]}{dx}$	$\dfrac{d\left[(\mathbf{arctg}\,x)^{\mathbf{ln}\,x}\right]}{dx}$

Правильное опознание вида функции
позволяет избежать ошибок
в определении правил нахождения сложных функций,
в структуре которых имеется основание и степень

Посмотрите и сравните!

Пример

$$\underbrace{y = x^{\sin x}}_{\text{показательно-степенная функция}} \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\underbrace{\frac{y'}{y} = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)'}_{\text{мысленно}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[x^{\sin x}\right]' = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Пример

$$\underbrace{y = \mathbf{a}^{\sin x}}_{\text{показательная функция}} \Rightarrow y' = \left(\mathbf{a}^{\sin x}\right)'$$

$$\underbrace{y'_x = \left(\mathbf{a}^{\sin x}\right)'_{\sin x} \cdot (\sin x)'_x}_{\text{мысленно}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\mathbf{a}^{\sin x}\right)' = \mathbf{a}^{\sin x} \cdot \ln \mathbf{a} \cdot \cos x$$

Пример

$$\underbrace{y = (\sin x)^{\mathbf{n}}}_{\text{степенная функция}} \Rightarrow y' = \left[(\sin x)^{\mathbf{n}}\right]'$$

$$\underbrace{y'_x = \left[(\sin x)^{\mathbf{n}}\right]'_{\sin x} \cdot (\sin x)'_x}_{\text{мысленно}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[(\sin x)^{\mathbf{n}}\right]' = \mathbf{n} \cdot (\sin x)^{\mathbf{n-1}} \cdot \cos x$$

2 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\dfrac{\left[(\mathbf{ln}\,x)^x\right]'}{\left(x^{\mathbf{ln}\,2}\right)'}$	$\dfrac{\left(x^{\mathbf{ln}\,x}\right)'}{\left[(\mathbf{tg}3)^x\right]'}$	$\dfrac{\left(\mathbf{e}^{\mathbf{cos}\,x}\right)'}{\left(\mathbf{ln}\,x^{\mathbf{ln}\,2}\right)'}$	$\dfrac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^{2x}\right]'}{\left(\mathbf{arctg}\sqrt{x}\right)'}$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Информационная схема «ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ»

$$\left[f^{\mathbf{n}}(x)\right]' = \mathbf{n}\,\frac{f^{\mathbf{n}}(x)}{f\ \ (x)} \cdot f'(x)$$

$$\underbrace{f\left(\underbrace{\underbrace{\mathbf{k}}_{\text{множитель}} \cdot \overbrace{x}^{\text{независимая переменная}} + \mathbf{p}}_{\text{линейный аргумент}}\right)}_{\textit{функция}}$$

$$\left[f\left(\boxed{\mathbf{k}}\,x+\mathbf{p}\right)\right]' = \boxed{\mathbf{k}} \cdot f'\left(\boxed{\mathbf{k}}\,x+\mathbf{p}\right)$$

$$\underbrace{f(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}})}_{\text{функция от } x}$$

$$\left[f(x)\right]' = f'(x)$$

$$\left[f(*)\right]'_{*} = f'_{*}(*)$$

$$\underbrace{f(\overbrace{*}^{\text{аргумент}})}_{\text{функция от } *}$$

Производная сложной функции

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'_{x} = f'_{g(x)}\left[g(x)\right] \cdot g'_{x}(x)$$

$$\boxed{\left\{f\left[g(x)\right]\right\}' = f'\left[g(x)\right] \cdot g'(x)}$$

Традиционное оформление

$$\left(\mathbf{log_a}x\right)' = \frac{\mathbf{1}}{x\,\mathbf{ln\,a}}$$

$$\forall\ \mathbf{a > 0,\ a \neq 1}$$
$$\forall\ x \in \mathbf{R}$$

$$\left(\mathbf{ln}\,x\right)' = \frac{\mathbf{1}}{x}$$

$$\left(\mathbf{arcsin}\,x\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-x^{\mathbf{2}}}}$$

$$\left(\mathbf{arccos}\,x\right)' = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-x^{\mathbf{2}}}}$$

$$\left(\mathbf{arctg}\,x\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}$$

$$\left(\mathbf{arcctg}\,x\right)' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}$$

$$\left[\mathbf{ln}\,\varphi(x)\right]' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

$$\left(f(x)^{\varphi(x)}\right)' = f(x)^{\varphi(x)} \cdot \left[\varphi'(x)\cdot \mathbf{ln}\,f(x) + \varphi(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Разные задачи

1 Тренажер

Для функции $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$ найдите $f'_{*}(*)$ при различных значениях аргумента $*$, если

1 $*=x$	2 $*=\sqrt[5]{x}$	3 $*=x^2$	4 $*=x^4$
5 $*=\sqrt[5]{x^4}$	6 $*=\dfrac{1}{x}$	7 $*=\dfrac{1}{x^2}$	8 $*=\dfrac{1}{x^4}$

2 Тренажер

Найдите производную

1 $\left(\dfrac{e^{7x}}{7}\right)'$	2 $\left(\dfrac{e^{6-x}}{\sqrt{2^x}}\right)'$	3 $\left(3^x\cdot e^{\frac{x}{\ln 3}}\right)'$	4 $\left(e^{\ln 8^{2x-5}}\right)'$

3 Тест

Найдите

результат	1	$\ln 2$	e^x	$\dfrac{8}{e^{4x}}$	$\dfrac{e^2}{e^x}$	$\dfrac{2}{e^x}$	2^x	$-\ln 2$	$-\dfrac{8}{e^{4x}}$
$\dfrac{2^e}{e^x}\cdot\left(\dfrac{e^x}{2^e}\right)'$									
$\dfrac{2^x}{e^2}\cdot\left(\dfrac{e^2}{2^x}\right)'$									
$\dfrac{2e}{\ln 2}\cdot\left(\dfrac{2^x}{2e}\right)'$									
$\dfrac{2}{e^{2x}}\cdot\left(\dfrac{2}{e^{2x}}\right)'$									

4 Тренажер

По заданной $f[g(x)]$ составьте $f'_{g(x)}[g(x)]$

1 $\sin(\cos x)$	2 $(\sin x)^2$	3 $\dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}$	4 $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$	5 $\cos\dfrac{1}{x}$

6 Тест Найдите производную	$\frac{-2}{x^2+4x+5}$	$\frac{2}{1+4x^2}$	$\frac{1}{2(1+x^2)}$	$\frac{1}{1+2x^2}$	$\frac{-4}{4+x^2}$	$\frac{-4}{4x^2+4x+5}$
$\left[2\,\mathrm{arcctg}(x+2)\right]'$						
$\left[\mathrm{arctg}\,2x\right]'$						
$\left[2\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}\right]'$						
$\left[\frac{\mathrm{arctg}\,x+2}{2}\right]'$						
$\left[\mathrm{arcctg}\frac{1+2x}{2}\right]'$						

7 Докажите, что

$$\forall\, x\in\mathbf{R},\ \forall\, \mathbf{a}>0,\ \mathbf{a}\neq 1$$

$$\left(\mathbf{a}^x\cdot\log_{\mathbf{a}}x\right)' = \mathbf{a}^x\left(\ln x+\frac{1}{x\cdot\ln\mathbf{a}}\right)$$

8 Докажите, что

$$\forall\, x\in\mathbf{R},\ \forall\, \mathbf{a}>0,\ \mathbf{a}\neq 1$$

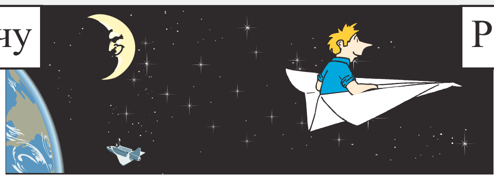
$$\left(\frac{\mathbf{a}^x}{\ln x}\right)' = \frac{\mathbf{a}^x}{\ln x}\cdot\left(\ln\mathbf{a}-\frac{1}{x\ln x}\right)$$

9 Тест Определите аргумент, по которому взята производная	$\cos x$	$\sin x$	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x$
$\sin'\cos x=\cos\cos x$							
$\cos'\sin x=\sin\sin x$							
$\arcsin'\sin x=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$							
$\arccos'\mathrm{tg}x=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2 x}}$							
$\mathrm{arctg}x'\cos x=\frac{1}{1+\cos^2 x}$							

10 Тест   Определите возможные способы дифференцирования

функции	*по формуле*			*по теореме*		*предварительное логарифмирование*
	$(\mathbf{a}^x)'$	$(x^{\mathbf{a}})'$	$(\log_{\mathbf{a}} x)'$	$[\mathbf{a} f(x)]'$	$[f(\mathbf{a}x)]'$	
$(\sin 3)^x$						
$\sin 3x$						
$\dfrac{\ln x}{\ln 3}$						
$x^{\sin x}$						
$3^{\sin x}$						

11 Решите задачу



Решите задачу **12**

Тело удаляется от Земли по закону $S(t) = A(t + \mathbf{c})^{\frac{2}{3}}$

Составьте формулу

его скорости

его ускорения

13 Тест   Определите функцию по результату ее дифференцирования

	$y = x^2 \cdot g(x)$	$y = [g(x)]^2$	$y = \dfrac{g(x)}{x^2}$	$y = \dfrac{x^2}{g(x)}$	$y = \dfrac{1}{g(x)}$
$y' = 2x \cdot g(x) + x^2 g'(x)$					
$y' = 2g(x) \cdot g'(x)$					
$y' = \dfrac{x \cdot g'(x) - 2g(x)}{x^3}$					
$y' = \dfrac{2x}{g(x)} - \dfrac{x^2 g'(x)}{g^2(x)}$					
$y' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$					

Таблица производных

$f(x)$	$\longrightarrow$ $f'(x)$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}$
$x^{\mathbf{n}}$	$\mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n-1}}$
$\dfrac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}$	$-\dfrac{\mathbf{n}}{x^{\mathbf{n+1}}}$
$\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$	$\dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\, x\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$
$\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$	$-\dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{x\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$
$\mathbf{a}^x$	$\mathbf{a}^x\cdot\mathbf{ln\,a}$
$\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^x$
$\mathbf{log_a}x$	$\dfrac{\mathbf{1}}{x\cdot\mathbf{ln\,a}}$
$\mathbf{ln}\,x$	$\dfrac{\mathbf{1}}{x}$
$\mathbf{sin}\,x$	$\mathbf{cos}\,x$
$\mathbf{cos}\,x$	$-\mathbf{sin}\,x$
$\mathbf{tg}\,x$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2 x}$
$\mathbf{ctg}\,x$	$-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}^2 x}$
$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}\,x}$	$-\dfrac{\mathbf{tg}\,x}{\mathbf{cos}\,x}$
$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}\,x}$	$\dfrac{\mathbf{ctg}\,x}{\mathbf{sin}\,x}$
$\mathbf{arctg}\,x$ $-\mathbf{arcctg}\,x$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}}$
$\mathbf{arcsin}\,x$ $-\mathbf{arccos}\,x$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-x^{\mathbf{2}}}}$

Правила дифференцирования

$$\left[f(x)\right]'_{|x=\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a})$$

$$\left[\mathbf{k}\cdot f(x)\right]' = \mathbf{k}\cdot f'(x)$$

$$(u\pm v)' = u'\pm v'$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^{\mathbf{2}}}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^{\mathbf{2}}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u'\frac{\mathbf{1}}{v} + u\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{v}\right)'$$

$$\left[f(\mathbf{k}\,x+\mathbf{p})\right]' = \mathbf{k}\cdot f'(\mathbf{k}\,x+\mathbf{p})$$

$$\left[f^{\mathbf{n}}(x)\right]' = \mathbf{n}\,\frac{f^{\mathbf{n}}(x)}{f\ (x)}\cdot f'(x)$$

$$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}' = f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$$

$$\left[\mathbf{ln}\,\varphi(x)\right]' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

$$\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]' = f(x)^{\varphi(x)}\cdot\left[\varphi'(x)\cdot\mathbf{ln}\,f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Зачет

Вариант 1

1 Докажите, что если

a $f(x) = x + \cos x$, $g(x) = (x + \cos x)^2$, то $\dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 2(x + \cos x)$

b $f(x) = 5^x - 3x^2$, $g(x) = \ln\left(5^x - 3x^2\right)$, то $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = f(x)$

2 Докажите, что если

a $y = \dfrac{k}{\cos x}$, то $y' = \operatorname{tg} x \cdot y$

b $y = \dfrac{\sin x}{x}$, то $x y' + y = \cos x$

3 Найдите

a $$\frac{\left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x\right)'}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)'}$$

b $$\left(\frac{\dfrac{1}{\sin x} - 3^x}{\ln 3 + \dfrac{1}{\cos x}}\right)'$$

4 Докажите, что $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall \mathbf{n} \in \mathbf{Z}$ $$\left(\frac{\ln^{n+1} x}{n+1}\right)' = \frac{\ln^n x}{x}$$

5 Докажите, что $$\frac{\left[\dfrac{u}{p} - \dfrac{p}{u}\right]'}{(u'p - up')} = \frac{u^2 - p^2}{u^2 p^2}$$

6 Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если

a $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$

b $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = x - x^3$

Зачет

Вариант 2

1 Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если

a $f(x) = \dfrac{\mathbf{5}^{2x+1}}{\mathbf{2}}$, $g(x) = \mathbf{5}^x + \mathbf{4}x\ln\mathbf{5}$

b $f(x) = x + \ln(x - \mathbf{5})$, $g(x) = \ln(x - \mathbf{1})$

2 Найдите

a $\left[\dfrac{\mathbf{1}}{\cos f(x)}\right]' \cdot \dfrac{\cos f(x)}{\operatorname{tg} f(x)}$

b $\left(\dfrac{\dfrac{\mathbf{1}}{f(x)} + g(x)}{f(x) + \dfrac{\mathbf{1}}{g(x)}}\right)'$

3 Докажите, что функция $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{\mathbf{1} - x^2}}$

удовлетворяет уравнению $(\mathbf{1} - x^2)y' - xy = \mathbf{1}$

4 Докажите, что $\left(\dfrac{\mathbf{a}x + \mathbf{b}}{\mathbf{c}x + \mathbf{d}}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix}}{(\mathbf{c}x + \mathbf{d})^2}$

5 Найдите $F'(x)$, если $F(x) = \begin{vmatrix} x-\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{3} & x & \mathbf{3} \\ -\mathbf{2} & -\mathbf{3} & x+\mathbf{1} \end{vmatrix}$

6 Определите функцию y, производная которой равна

a $y' = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \dfrac{\mathbf{2}}{x^2}$

b $y' = \dfrac{\ln 3}{\cos^2 x} + \dfrac{\mathbf{e}^3}{\sin^2 x}$

7 Проверить, что для функции $f(x) = x^2$ справедливо соотношение

$$f'(a + b) = f'(a) + f'(b)$$

Будет ли это тождество справедливым для $f(x) = x^3$?

Зачет

Вариант 3

1 Доказать, что производная четной степенной функции есть нечетная функция, а производная от нечетной степенной функции – четная функция.

2 Найти производную

a $\left[\mathbf{e}^{x^2}+\mathbf{e}\cdot x^4\right]'_{x^2}$

b $\left[\sin^4 x^2\right]'_{x^{1/2}}$

3 **a** Проверить справедливость соотношения

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$$

если x и y связаны зависимостью

$$y=\mathbf{a}x+\mathbf{b}$$

b Для функции

$$x=\mathbf{e}^{\operatorname{arctg} y}$$

найдите $\frac{dy}{dx}$

4 Для функции

$$z=\frac{\ln y}{\cos x}-\frac{1}{\sqrt{y}\sin x}$$

a найдите z'_x при условии, что $y=const$

b найдите z'_y при условии, что $x=const$

5 Найдите $F'(x)$, если $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ (x)' & (x^2)' & (x^3)' \\ \left[(x)'\right]' & \left[(x^2)'\right]' & \left[(x^3)'\right]' \end{vmatrix}$

6 Докажите, что $\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\mathbf{k}}}+\ln\sqrt{x^2+\mathbf{k}}\right)'=\frac{x+\sqrt{\mathbf{k}}}{x^2+\mathbf{k}}$

7 Из формулы $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$ дифференцированием вывести формулу

$$\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$$

Список использованной литературы

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб.для 10-11 кл. сред.шк. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1993.
2. Бохан К.А. Курс математического анализа. Т.1. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед.ин-тов. Изд. 2-е. – М.: Просвещение, 1972.
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. Учебное пособие. Изд.2-е, перераб. – М.: Высшая школа, 1993.
4. Виленкин Н.Я., Бохан К.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч.1. – М.: Просвещение, 1971.
5. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Просвещение, 1964
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч.I. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.
7. Демидович Б.П. Сборник задая и упражнений по математическому анализу. – Изд. 8-е. М.: Наука, 1972.
8. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие / Вавилов В.В., Мельников И.И, Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
9. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 1964.
10. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1989.
11. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математичесикий анализ: Учеб. для техникумов. – М.: Высшая школа, 1990.
12. Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002.
13. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: [Пер. с англ.] /Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – 3-е изд. – М.: "Мир", 1976.
14. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1.– Изд. 4-е. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Резник Наталия Александровна
Негодяева Лариса Егоровна

Начальные представления о дифференциальном исчислении:
Визуальный конспект-практикум.

Научные редакторы:
Н.М. Ежова, кандидат педагогических наук, Мурманский институт экономики и права, доцент кафедры общественных и естественных наук.
И.С. Темникова, аспирант Мурманского государственного педагогического университета, преподаватель кафедры общенаучных дисциплин филиала БИЭПП в г. Мурманске.

Физические интерпретации: Светлана Владимировна Плотникова
Редактирование и апробация: Негодяева Лариса Егоровна
Компьютерный набор: Наталия Александровна Резник

Печатается по решению РИСа ЛОИРО
Подписано в печать 09.09.2005

Отпечатано на ризографе. Бумага № 1. Усл. печ. л. 4,75. Тираж 300 экз.
Заказ № 191

Ленинградский областной институт развития образования
197136, СПб, Чкаловский пр., 25 а

Полезные пределы

$$\Delta x = x - x_0 \to 0 \;\Downarrow\; f(x) \to f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} c = c$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{число}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$$

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Если существуют пределы, ... *то существуют пределы!*

$$\lim_{x \to x_0} \left[c \cdot f(x) \right] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

число выносится за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

предел суммы/разности равен сумме/разности пределов

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad \boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0}$$

предел частного равен частному пределов
при условии, что предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^n$$

предел степени равен степени предела

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

предел корня равен корню из предела

Если существуют пределы, ... *то существуют пределы!*

Если существуют пределы, ... *то существуют пределы!*

Замечательные пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$