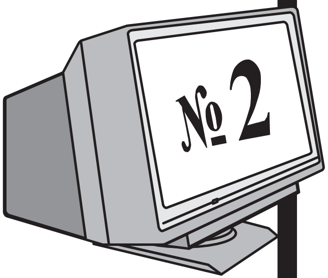
Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.



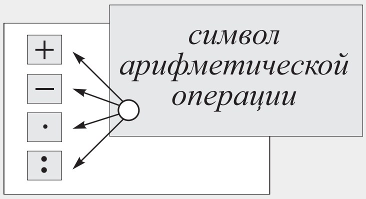
Правила дифференцирования

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

1

Правила дифференцирования

ПРИРАЩЕНИЯ СУММЫ И РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО

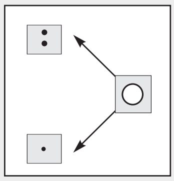


$$\Delta\left[f(x)\circ g(x)\right]=\left[f(x+\Delta x)\circ g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)\circ g(x)\right]$$

Пример

$$\Delta\left[\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right]=\left[\frac{\sqrt{x+\Delta x}}{(x+\Delta x)^2}\right]-\left[\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right]$$

$$\Delta\left[\sin x\cdot\frac{1}{x}\right]=\left[\sin(x+\Delta x)\cdot\frac{1}{x+\Delta x}\right]-\left[\sin x\cdot\frac{1}{x}\right]$$



УСЛОВИЯ ЗАДАНИЯ ПРИРАЩЕНИЙ ФУНКЦИЙ

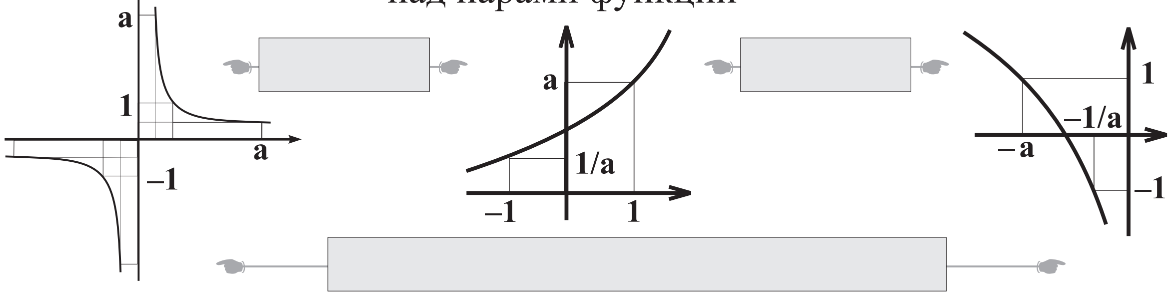
Приращения
суммы и разности, произведения и частного двух функций
$\Delta\left[u(x)\circ v(x)\right]$
можно рассматривать
только при условиях:

$u(x), v(x): x\in[a;b]$ и $\Delta x:(x+\Delta x)\in[a;b]$

обе функции заданы на одном и том же промежутке

приращение аргумента достаточно мало (не выводит точку $x+\Delta x$ за переделы этого промежутка)

1 ПОСМОТРИТЕ И
определите:
на каком промежутке
имеют смысл арифметические операции
над парами функций



Правила дифференцирования

2 Тренажер

Составьте формулу

$$\Delta\left[f(x)\circ g(x)\right]=\left[\,f(x+\Delta x)\circ g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)\circ g(x)\right]$$

для функций

1	2	3	4
$x+\cos x$	$2x-\frac{1}{x}$	$2^x\cdot\frac{1}{x^2}$	$\frac{\sin x}{2x-1}$

3 Докажите, что

$\forall\ u(x), v(x): x\in[a;b]$

$\Delta x:(x+\Delta x)\in[a;b]$

всегда $\Delta\left[u(x)\pm v(x)\right]=\Delta u(x)\pm\Delta v(x)$

4 Докажите, что

$\forall\ u(x), v(x): x\in[a;b]$

$\Delta x:(x+\Delta x)\in[a;b]$

всегда $\Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right]\neq\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)$

5 Докажите, что

$\forall\ u(x), v(x): x\in[a;b]$

$\Delta x:(x+\Delta x)\in[a;b]$

$v(x)\not\equiv 0$

всегда $\Delta\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]\neq\frac{\Delta u(x)}{\Delta v(x)}$

определите обязательное, но отсутствующее условие

6 ПОСМОТРИТЕ И

7 Докажите, что

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\neq\Delta\frac{f(x)}{x}$$

8 Докажите, что

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{x}+x\right)}{\Delta x}=1-\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

9 Докажите, что

$$\frac{\Delta\left(2^x\right)}{\Delta\left(e^x\right)}=\left(\frac{2}{e}\right)^x\cdot\frac{2^{\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1}$$

2

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ СУММЫ

Если $\exists\ u'$ и v' на $\langle a;\, b\rangle$, то $\exists\ (u+v)'$ на $\langle a;\, b\rangle$:

$$\underbrace{\big[u(x)+v(x)\big]'}_{\textit{Производная суммы}} \underbrace{=}_{\textit{равна}} \underbrace{u'(x) + v'(x)}_{\textit{сумме производных}}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

1 Проанализируем, существует ли $(u+v)'$ на $\langle a;\, b\rangle$:

$\big]\ u, v \in \underbrace{C'\langle a;b\rangle}_{\substack{\textit{дифференцируемы} \\ \textit{на } \langle a;b\rangle}}$

$\Downarrow$

Если для $x \underbrace{\mapsto}_{\textit{выбрано}} \Delta x$, то $\begin{array}{l} \text{для } u \underbrace{\qquad\mapsto\qquad}_{} \Delta u \\ \qquad\textit{найдется соответствующее} \\ \text{для } v \overbrace{\qquad\mapsto\qquad}^{} \Delta v \end{array}$

$$\big]\ f = u+v \Longrightarrow \Delta f(x) = \Delta\big[\,u(x) + v(x)\,\big] =$$

$$=\big[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\big]-\big[\boxed{}\big]=$$

$$=\underbrace{\big[u(x+\Delta x)-u(x)\big]}_{=\ \boxed{}} + \underbrace{\big[\boxed{}\big]}_{\Delta v(x)} =$$

$\Downarrow$

$f = u+v \in \underbrace{C'\langle a;b\rangle}_{\substack{\textit{дифференцируема} \\ \textit{на } \langle a;b\rangle}}$

2 При $\Delta x \to \mathbf{0}$: $\boxed{(u+v)'} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{} =$$

$$= \boxed{u'(x) + v'(x)}$$

Правила дифференцирования

Пример

Найдем производную функции

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Решение

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[f(x)\right]'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=$$

$$=\underbrace{\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}_{\text{мысленно}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{2x}\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Пример

Решим уравнение

$$\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+6x\right)'=0$$

Решение

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot x^3\right)'+\left(\frac{7}{2}\cdot x^2\right)'+(6x)'}_{\text{мысленно}}=(0)'$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 3x^2+\frac{7}{2}\cdot 2x+6}_{\text{мысленно}}=0$$

$$x^2+7x+6=0$$

$$\left(x^2+6x\right)+(x+6)=0$$

$$(x+6)\cdot(x+1)=0$$

$$\Downarrow$$

$$x=-6 \text{ или } x=-1$$

1 Докажите, что

$$\left]\ u,v,\omega\in C'\langle a;b\rangle\right.$$

$$\Downarrow$$

$$(u+v+\omega)'=u'+v'+\omega'$$

2 **ПОСМОТРИТЕ И** ***запишите*** ответ

$$\left(\cos x+e^x+\sqrt{x}\right)'=$$

3 Серия — Решите уравнение

1. $x^2-1=(2x)'$
2. $\left(x^3+x^2\right)'=(-x)'$
3. $\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)'+(-8x)'=3x$
4. $\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+12x\right)'=\left(1+x^2+\frac{1}{6}x^3\right)'$

3

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ РАЗНОСТИ

Если $\exists$ u' и v' на $\langle a;\, b\rangle$, то $\exists$ $(u-v)'$ на $\langle a;\, b\rangle$:

$$\underbrace{\left[u(x)-v(x)\right]'}_{\text{Производная разности}} \underbrace{=}_{\text{равна}} \underbrace{u'(x) - v'(x)}_{\text{разности производных}}$$

Доказательство

1 $\quad]\ u,\, v \in C'\langle a;b\rangle \ \Rightarrow$ при $x \mapsto \Delta x$: $\begin{matrix} u \mapsto \Delta u \\ v \mapsto \Delta v \end{matrix}$

$$]\ f = u - v \Longrightarrow \Delta f(x) = \Delta\left[u(x) - v(x)\right] =$$

$$= \left[\boxed{}\right] - \left[u(x)-v(x)\right] =$$

$$= \underbrace{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}_{} - \underbrace{\left[\boxed{}\right]}_{} =$$

$$f = u - v \in \underbrace{C'\langle a;b\rangle}_{\substack{\text{дифференцируема} \\ \text{на } \langle a;b\rangle}} \qquad = \Delta u(x) - \Delta v(x)$$

2 $\quad$ При $\Delta x \to 0$: $\boxed{(u-v)'} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{} - \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{} =$$

$$= \boxed{u'(x) - v'(x)}$$

Данную теорему при тех же условиях можно доказать, опираясь на теоремы о **производной суммы** и **вынесении числа за знак производной**

$$\left[u(x)-v(x)\right]' = \left\{u(x)+\left[-v(x)\right]\right\}' = \left[u(x)\right]' + \left[-v(x)\right]' =$$

$$= \left[u(x)\right]' - \left[v(x)\right]' = u'(x) - v'(x)$$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

Правила дифференцирования

Пример

Найдем производную функции
$$f(x)=3x^2-1$$

Решение

$$f(x)=3x^2-1$$
$$\Downarrow$$
$$\left[f(x)\right]'=\left(3x^2-1\right)'=$$
$$=\underbrace{\left(3x^2\right)'-(1)'}_{\text{мысленно}}=$$
$$=\underbrace{3\cdot\left(x^2\right)'-0}_{\text{мысленно}}=6x$$

1 Докажите, что
$$\left[\mathbf{k}\cdot x-\mathbf{p}\cdot x\right]'=\mathbf{k}-\mathbf{p}$$

2 Докажите, что
$$\left[\mathbf{k}-\frac{\mathbf{k}-f(x)}{\mathbf{k}}\right]'=\frac{f'(x)}{\mathbf{k}}$$

3 Докажите, что
$$\left(5+5x+x^2-x^3\right)'\Big|_{x=-1}=0$$

4 Докажите, что
$$\left[x^2\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)\right]'=1$$

5 Докажите, что
$$x^2\cdot\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x}$$

6 Тест. Вычислите значение производной функции

$f(x)=2+x-x^2$ в заданной точке	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f'\left(-\frac{1}{2}\right)$													
$f'(-1)$													
$f'(0)$													
$f'(1)$													
$f'\left(\frac{1}{2}\right)$													

4

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

$$\left.\begin{array}{l} \rbrack\, u(x),\ v(x):\ x\in\langle a;b\rangle \\ \exists\, u'(x),\ v'(x)\ \forall x\in(a;b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left[u(x)\cdot v(x)\right]' = \\ = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x) \\ \forall x\in(a;b) \end{array}$$

Доказательство

$$\rbrack\ f(x) = u(x)\cdot v(x):\ u(x),\ v(x):\ x\in\langle a;b\rangle$$

$\boxed{1}$ $\Delta f(x) = \Delta\left[\,u(x)\cdot v(x)\,\right]$

Так как $\Delta u(x)=u(x+\Delta x)-u(x)$, то $\Delta u(x)+u(x)=\boxed{u(x+\Delta x)}$

Так как $\Delta v(x)=v(x+\Delta x)-v(x)$, то $\boxed{v(x+\Delta x)}=\Delta v(x)+v(x)$

Отсюда

$$f(x+\Delta x)-f(x)= u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) =$$

$$=\left[u(x)+\Delta u(x)\right]\cdot\left[v(x)+\Delta v(x)\right]- u(x)\cdot v(x) =$$

$$= \Delta u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v(x) +\Delta u(x)\cdot\Delta v(x)$$

$\boxed{2}$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\boxed{}\cdot v(x)+u(x)\cdot\boxed{}+\boxed{}\cdot\Delta v(x)$$

$\boxed{3}$ Т. к. $\exists\, u'(x),\ v'(x)\ \forall x\in(a;b)$:

$$\boxed{\left[u(x)\cdot v(x)\right]'} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)+\boxed{}+\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot\Delta v(x)\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}_{u'(x)}\cdot v(x)+u(x)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}}_{v'(x)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v(x)}_{0} =$$

$$= \boxed{u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)}$$

Правила дифференцирования

1 Тренажер — Оформите правую часть равенства

1	2	3	4
$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' =$	$\left[f(x)\cdot \mathbf{3}^x\right]' =$	$\left[x^3\cdot g(x)\right]' =$	$\left(\sqrt{x}\cdot \cos x\right)' =$

2 Серия — Найдите производную произведения функций

1	2	3	4
$\left(\sin x\cdot \mathbf{e}^x\right)'$	$\left(\frac{1}{x^4}\cdot \mathbf{2}^x\right)'$	$\left(\frac{x^3}{\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\frac{x^4\cdot \mathbf{3}^x}{\sqrt{x}}\right)'$

3 Докажите, что

$$\rceil\ u, v, \omega \in C'\langle a; b\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$(u\cdot v\cdot \omega)' =$$

$$= u'\cdot v\cdot\omega + u\cdot v'\cdot\omega + u\cdot v\cdot\omega'$$

4 ПОСМОТРИТЕ И

запишите

ответ

$$\left(\sin x\cdot x^2\cdot \mathbf{2}^x\right) =$$

Пример Выведем производную функции $y=\frac{1}{x^3}$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)'}_{\textit{мысленно}} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^3} = -\frac{3}{x^4}$$

5 Докажите, что

$$\left(x^4\right)' = 4x^3$$

6 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = -\frac{4}{x^5}$$

7 ПОСМОТРИТЕ И **8**

$$\left(x^2\right)' = 2\cdot x = 2\cdot x^{2-1}$$

проаналируйте

результат дифференцирования

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} = -2\cdot\frac{1}{x^{2+1}}$$

и оформите аналогичным образом

$\left(x^3\right)'$ и $\left(x^4\right)'$

результаты дифференцирования

$\left(\frac{1}{x^3}\right)'$ и $\left(\frac{1}{x^4}\right)'$

5

Правила дифференцирования

ПОСТРОЕНИЕ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ПРОИЗВОДНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Построение гипотезы об общей формуле производной степени с натуральным показателем

$$(x)' = \left(x^1\right)' = x^0 = \mathbf{1}\cdot x^{\mathbf{1}-\mathbf{1}}$$

$$\left(x^2\right)' = \mathbf{2}\cdot x^1 = \mathbf{2}\cdot x^{\mathbf{2}-\mathbf{1}}$$

$$\left(x^3\right)' = \mathbf{3}\cdot x^2 = \mathbf{3}\cdot x^{\mathbf{3}-\mathbf{1}}$$

$$\left(x^4\right)' = \mathbf{4}\cdot x^3 = \mathbf{4}\cdot x^{\mathbf{4}-\mathbf{1}}$$

....

$$\Downarrow$$

Гипотеза:

$$\overbrace{\left(x^{\mathbf{n}}\right)' = \mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}}^{\text{Общая формула}}$$

$$\underbrace{\left(x^{\mathbf{n}}\right)' = \mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n}}\cdot \boxed{\frac{\mathbf{1}}{x}}}_{\text{формула, удобная для нахождения результата}}$$

Проверка гипотезы методом математической индукции

$$\left(x^{\mathbf{n}}\right)' = \mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}$$

Проверяем при $n=\mathbf{1}$

$$\left(x^{1}\right)' = \mathbf{1}\cdot x^{\mathbf{1}-\mathbf{1}}$$

$$\Downarrow$$

при $n=\mathbf{1}$
утверждение верно

Предполагаем при $n=\mathbf{k}$

утверждение
$$\left(x^{\mathbf{k}}\right)' = \mathbf{k}\cdot x^{\mathbf{k}-\mathbf{1}}$$
верно

Проверяем при $\mathbf{n}=\mathbf{k}+\mathbf{1}$

$$\left(x^{\mathbf{k}+\mathbf{1}}\right)' = \left(x^{\mathbf{k}}\cdot x^1\right)' =$$

$$= \mathbf{k}x^{\mathbf{k}-\mathbf{1}}\cdot x + x^{\mathbf{k}}\cdot \mathbf{1} = \mathbf{k}x^{\mathbf{k}} + x^{\mathbf{k}} =$$

$$= (\mathbf{k}+\mathbf{1})\cdot x^{\mathbf{k}}$$

$$\Downarrow$$

при $\mathbf{n}=\mathbf{k}+\mathbf{1}$
утверждение верно

$$\Downarrow$$

гипотеза $\left(x^{\mathbf{n}}\right)' = \mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}$ ***истинна*** $\forall\ \mathbf{n}\in\mathbf{N}$

Пример

$$\left[\frac{x^4}{\mathbf{2}}\right]' + \left[\frac{x^6}{\mathbf{3}}\right]' + \left[\frac{x^8}{\mathbf{4}}\right]' + \left[\frac{x^{10}}{\mathbf{5}}\right]' + \left[\frac{x^{12}}{\mathbf{6}}\right]' + \left[\frac{x^{14}}{\mathbf{7}}\right]' =$$

$$= \underbrace{\frac{\mathbf{4}x^3}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{6}x^5}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{8}x^7}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{10}x^9}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{12}x^{11}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{14}x^{13}}{\mathbf{7}}}_{\textit{мысленно}} =$$

$$= \mathbf{2}x^3\cdot\left(\mathbf{1} + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}\right)$$

Правила дифференцирования

Пример Найдем производную функции $f(x)=\left(x^3+3\right)\left(x^4+2x-5\right)$

Решение (1 способ)

$$f'(x)=\left[\left(x^3+3\right)\cdot\left(x^4+2x-5\right)\right]'=$$

$$=\left(x^7+2x^4-5x^3+3x^4+6x-15\right)'=$$

$(u+v)'=u'+v'$

$$=\underbrace{\left(x^7\right)'+\left(5x^4\right)'-\left(5x^3\right)'+(6x)'-(15)'}_{\text{мысленно}}=$$

$$=7x^6+20x^3-15x^2+6$$

Посмотрите и сравните!

Решение (2 способ)

$$f'(x)=\left[\left(x^3+3\right)\cdot\left(x^4+2x-5\right)\right]'=$$

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

$$=\underbrace{\left(x^3+3\right)'\cdot\left(x^4+2x-5\right)+\left(x^3+3\right)\cdot\left(x^4+2x-5\right)'}_{\text{мысленно}}=$$

$$=3x^2\cdot\left(x^4+2x-5\right)+\left(x^3+3\right)\cdot\left(4x^3+2\right)$$

1 ПОСМОТРИТЕ И 2

постройте гипотезу об общей формуле производной степени с целым отрицательным показателем

$$\left(x^{-1}\right)'=-1\cdot x^{-2}=-1\cdot x^{-1-1}$$

$$\left(x^{-2}\right)'=$$

$$\left(x^{-3}\right)'=$$

$$\left(x^{-4}\right)'=$$

докажите методом математической индукции истинность этой гипотезы в виде

$$\underbrace{\left(x^{-\mathbf{n}}\right)'=-\mathbf{n}\cdot x^{-\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}}_{\text{формула, удобная для нахождения результата}}$$

3 Серия Упростите выражение

1	2	3	4
$\left[\frac{x^5}{5}-\left(\frac{x^2}{2}\right)'+1\right]'$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}x^2}\right)'$	$\frac{\left(x^{13}\right)'\cdot\left(x^{-14}\right)'}{\left(x^{14}\right)'}$	$\left(x^4\right)'\cdot\left(x^{-2}\right)'-\left(x^5\right)'\cdot\left(x^{-3}\right)'$

Резник Н.А., Негодяева Л.Е. Начальные представления о дифференциальном исчислении: Визуальный конспект-практикум. – СПб, ЛОИРО, 2005. – 76 с.

6

Правила дифференцирования

ОБОБЩЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ ДЛЯ $y = x^{\mu}$ $(\mu \in \mathbf{R})$

Предположение

$$\left(x^{\mu}\right)' = \mu \cdot x^{\mu-1} \quad \forall \mu \in \mathbf{R}$$

Доказательство

$$\boxed{\left(x^{\mu}\right)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^{\mu}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu} \cdot \dfrac{(x+\Delta x)^{\mu}}{x^{\mu}} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu} \cdot \left(\boxed{}\right)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu} \frac{\left(\boxed{}\right)^{\mu} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\mu}}{x} \cdot \frac{\left(1 + \boxed{}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} =$$

$$\boxed{\text{из } \Delta x \to 0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{x} \to 0}$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu-1}}_{x^{\mu-1}} \cdot \underbrace{\lim_{\frac{\Delta x}{x} \to 0} \frac{\left(1 + \boxed{}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}}_{\mu} =$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha} = \mu$

$$= \boxed{\mu \cdot x^{\mu-1}}$$

1 Тренажер	Не осуществляя алгебраических преобразований, запишите результат дифференцирования по схеме $\left(x^{\mu}\right)' = \mu \cdot x^{\mu-1}$		
1 $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-7}\right)$	2 $\dfrac{d}{dx}\left(x^{1/7}\right)$	3 $\dfrac{d}{dx}\left(x^{5/6}\right)$	4 $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-5/6}\right)$

Правила дифференцирования

2 Тренажер

Заполните пропуски в таблице производных степеней и радикалов, составленной по формуле, удобной для вычислений

$f(x)$	☞ $f'(x)$
x^{n}	☛ $n \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot x^{n}$
⇓	⇓
$\frac{1}{x^{n}}$	☛ $\boxed{} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \boxed{}$
$\sqrt[n]{x}$	☛ $\boxed{} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \boxed{}$
$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	☛ $\boxed{} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \boxed{}$
$\sqrt[n]{x^{k}}$	☛ $\boxed{} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \boxed{}$
$\frac{1}{\sqrt[n]{x^{k}}}$	☛ $\boxed{} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \boxed{}$

Запишите по формуле удобной для вычислений результат дифференцирования и упростите его

3 Тренажер

1	$\left(\sqrt{x}\right)'$
2	$\left(\sqrt[3]{x}\right)'$
3	$\left(\sqrt[3]{x^{2}}\right)'$
4	$\left(\sqrt[4]{x^{3}}\right)'$
5	$\left(\sqrt[4]{x^{5}}\right)'$

4 Тренажер

1	$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$
2	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'$
3	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)'$
4	$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^{3}}}\right)'$
5	$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^{5}}}\right)'$

Пример

$$\left(\frac{6}{x\sqrt[3]{x^{2}}}\right)' = 6\cdot\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x^{2}}}\right)' = 6\cdot\left(-\frac{5}{3}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^{2}}}\right) = -\frac{10\sqrt[3]{x}}{x^{3}}$$

5 Тренажер Найдите производную

1	2	3	4
$\left(-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\frac{4}{x^{2}\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\frac{x}{x^{5}\sqrt{x}}\right)'$	$\left(\frac{6x^{2}}{x^{7}\sqrt{x^{3}}}\right)'$

7

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ ЧАСТНОГО

$$\left.\begin{array}{r}]\, u(x),\ \nu(x): x\in\langle a;b\rangle \\ \nu(x)\neq \mathbf{0}\ \forall\ x\in\langle a;b\rangle \\ \exists\, u'(x), \nu'(x)\ \ \forall x\in(a;b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall x\in(a;b)\quad \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Доказательство

$$]\ h=\frac{u}{v}\ \Rightarrow\ u=v\cdot h:\ u(x),\ \nu(x): x\in\langle a;b\rangle \text{ и } \nu(x)\neq\mathbf{0}\ \forall\ x\in(a;b)$$

Т.к. $\exists\, u'(x), \nu'(x)\ \ \forall x\in(a;b)$

$$\Downarrow$$

$$u'=(v\cdot h)'=v\cdot h'+v'\cdot h$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h'}=\frac{u'-v'\cdot h}{v}=\frac{u'-v'\cdot\dfrac{u}{v}}{v}=\boxed{\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

Пример $$(\sin x\cdot x^2)'=\underbrace{(\sin x)'\cdot x^2+\sin x\cdot(x^2)'}_{\text{мысленно}}=x^2\cos x+2x\sin x$$

$$\boxed{(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

Обратите внимание на сходство и различия в формулах

Пример $$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)'=\overbrace{\frac{(\sin x)'\cdot x^2-\sin x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}}^{\text{мысленно}}=\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$$

Правила дифференцирования

Пример

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \underbrace{\frac{\left(x^2\right)'\cdot(x-1) - x^2\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \underbrace{\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}}_{\text{мысленно}} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

1 Тест. Определите результат преобразования выражения

выражения	$\frac{1}{2^x}$	2^x	$\frac{1}{2^e}$	2^e	$\frac{x}{2^x}$	$\frac{2^x}{x}$	$\ln 2$	$\frac{1}{\ln 2}$	$\frac{e}{2^x}$	$\frac{2^x}{e}$
$\left(\frac{2^x}{x^2}\right)'\cdot\frac{x^3}{\ln 2\cdot x-2}$										
$\left(\frac{e^x}{2^e}\right)'\cdot\frac{1}{e^x}$										
$\left(\frac{x^2}{2^x}\right)'\cdot\frac{1}{2-x\cdot\ln 2}$										
$\left(\frac{2^x}{e^2}\right)'\cdot\frac{e^2}{2^x}$										

2 Тренажер. Найдите производную по теореме о производной произведения

1	2	3	4
$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\cdot\sin x\right)'$	$\left(\frac{4^x}{\sqrt[4]{x}}\right)'$	$\left(\frac{\cos x}{2x^3}\right)'$	$\left(\frac{5x-1}{\sqrt[3]{x}}\right)'$

3 Тренажер. Найдите производную по теореме о производной частного

8

Правила дифференцирования

ПОЛЕЗНОЕ СЛЕДСТВИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЧАСТНОГО

$$\left.\begin{array}{l}]\ f(x) : x \in \langle a\,;b\rangle \\ \quad f(x) \neq \mathbf{0}\ \forall\, x \in (a\,;b) \\ \exists\, f'(x)\ \forall\, x \in (a\,;b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\frac{\mathbf{1}}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f^{\mathbf{2}}(x)} \quad \forall\, x \in (a\,;b)$$

Доказательство

$$]\ f(x) \neq \mathbf{0}\ \forall\, x \in (a\,;b) \text{ и } f(x) : C' \in \langle a\,;b\rangle$$

$$\boxed{\left[\frac{\mathbf{1}}{f(x)}\right]'} = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \underbrace{\frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^{\mathbf{2}}(x)}}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \frac{(\mathbf{1})'\cdot f(x) - \mathbf{1}\cdot[f(x)]'}{[f(x)]^{\mathbf{2}}} = \boxed{-\frac{f'(x)}{f^{\mathbf{2}}(x)}}$$

Пример

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x}-x^{\mathbf{2}}}\right)' = -\underbrace{\frac{\left(\sqrt{x}-x^{\mathbf{2}}\right)'}{\left(\sqrt{x}-x^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}}_{\text{мысленно}} = -\frac{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{x}} - \mathbf{2}x}{\left(\sqrt{x}-x^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{4}x\sqrt{x}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-x^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}$$

1 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}\,x}\right)' = -\frac{\mathbf{ctg}\,x}{\mathbf{sin}\,x}$$

2 Докажите, что

$\forall\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}$:

$$\left(\frac{x}{x\pm\mathbf{n}}\right)' = \frac{\pm\,\mathbf{n}}{(x\pm\mathbf{n})^{\mathbf{2}}}$$

3 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}\,x}\right)' = \frac{\mathbf{tg}\,x}{\mathbf{cos}\,x}$$

4 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}\,x}\right)' = \frac{\mathbf{sin}\,x}{\mathbf{1}-\mathbf{sin}^{\mathbf{2}}\,x}$$

5 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}\,x}\right)' = \frac{\mathbf{cos}\,x}{\mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\,x-\mathbf{1}}$$

Правила дифференцирования

6 Серия	Найдите производную		
1 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$	2 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$	3 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x\ln 3}{x-3}\right)$	4 $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{5x}{9(x-3)}\right]$

ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ ЧАСТНОГО, УДОБНАЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}\right]'$$

Пример

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \underbrace{\left(x^2\cdot\frac{1}{\cos x}\right)'}_{\textit{мысленно}} = \underbrace{\left(x^2\right)'\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}_{\textit{мысленно}} =$$

$$= 2x\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{x}{\cos x}\left(2 + x\,\mathrm{tg}\,x\right)$$

Посмотрите и сравните!

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \underbrace{\frac{\left(x^2\right)'\cdot\cos x - x^2\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}}_{\textit{мысленно}} =$$

$$= \frac{2x\cdot\cos x + x^2\cdot\sin x}{\cos^2 x} = 2x\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{x}{\cos x}\left(2 + x\,\mathrm{tg}\,x\right)$$

7 Серия	Найдите производную		
1 $\left(\cos x\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'$	2 $\left(\dfrac{3^x}{\ln 3\cdot\sin x}\right)'$	3 $\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{2\cos x}\right)'$	4 $\left(\dfrac{e^3\cdot 2^x}{x^2-3x+1}\right)'$

9

Правила дифференцирования

ПРОИЗВОДНАЯ ТАНГЕНСА

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \neq \mathrm{k}\frac{\pi}{2} \ (\mathrm{k} \in \mathrm{Z})$$

Доказательство

$$\boxed{(\mathrm{tg}\,x)'} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$= \underbrace{\frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2}}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

или

$$\boxed{(\mathrm{tg}\,x)'} = \left(\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}\right)' =$$

$$\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$= \underbrace{(\sin x)' \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)'}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \cdot \left(-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= 1 + \mathrm{tg}^2 x =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

1 Докажите, что

$$\forall x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi \ (\mathrm{k} \in \mathrm{Z})$$

$$\left(\cos x \cdot \frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

2 Докажите, что

$$\forall x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi \ (\mathrm{k} \in \mathrm{Z})$$

$$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

ПРОИЗВОДНАЯ КОТАНГЕНСА

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi\mathrm{k} \ (\mathrm{k} \in \mathrm{Z})$$

Правила дифференцирования

3 Тренажер Найдите y', если

1	2	3	4
$y=\dfrac{\mathbf{tg}\,x}{\mathbf{cos}\,\mathbf{2}}$	$y=\mathbf{tg5}\cdot\mathbf{ctg}\,x$	$y=\dfrac{\mathbf{sin}\,\mathbf{3}}{\mathbf{tg}\,x}+x$	$y=\mathbf{tg}\,\mathbf{2}\,\mathbf{ctg}\,x+\mathbf{ctg}\,\mathbf{2}\,\mathbf{tg}\,x$

4 Тест Найдите

результат	$\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$	$\mathrm{tg}^2 x$	$\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x}$	$\mathrm{tg}^2 x+1$	$\dfrac{4}{\sin^2 2x}$	$\dfrac{\cos 2x}{\cos^4 x}$	$\mathrm{ctg}^2 x$	$\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$
$\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{ctg}x}\right)'$								
$(\mathrm{tg}x-x)'$								
$\left(-\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\mathrm{tg}x}\right)'$								
$(\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x)'$								

5 Докажите, что

$$\begin{vmatrix}(\mathrm{tg}x)' & (-\mathrm{ctg}x)' \\ 1 & 1\end{vmatrix}=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)'$$

7 Докажите, что

$$\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{ctg}x}\right)'=2\mathrm{tg}x\cdot(\mathrm{tg}x)'$$

6 Докажите, что

$$\begin{vmatrix}(\mathrm{tg}x)' & 1 \\ 1 & (\mathrm{ctg}x)'\end{vmatrix}\neq(\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x)'$$

8 Докажите, что

$$\left(\frac{x}{\mathrm{ctg}x}\right)'=\mathrm{tg}x+x\cdot(\mathrm{tg}x)'$$

9 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x}\right)'=\cos 2x$$

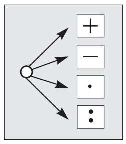
10 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x}\right)'=-\frac{1}{\cos^2 2x}$$

Правила дифференцирования

Информационная схема
«ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ»

$$\Delta\left[f(x)\circ g(x)\right]= =\left[f(x+\Delta x)\circ g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)\circ g(x)\right]$$

где 

Производная суммы

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

Производная разности

Производная произведения

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Производная частного

$$(\mathbf{tg}x)'=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2 x}$$

$$(\mathbf{ctg}x)'=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}^2 x}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}\,x}\right)'=-\frac{\mathbf{ctg}x}{\mathbf{sin}x}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}\,x}\right)'=\frac{\mathbf{tg}x}{\mathbf{cos}x}$$

Производная степени с целым показателем

$$\left(x^{\mathbf{n}}\right)'=\mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}\right)'=-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}$$

$$\left(x^{\mathbf{n}}\right)'=\mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{n-1}}$$

Формулы, удобные для практики

Производная степени с дробным показателем

$$\left(\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}\right)'=\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}\right)'=-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x}$$

Правила дифференцирования

Разные задачи

1 Тренажер	Найдите производную		
1 $\left(\frac{x^4}{x^7}\right)'$	2 $\left(\sqrt[4]{x^7}\right)'$	3 $\left(\frac{1}{x^7}\right)'$	4 $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}\right)'$

2 Тренажер	Найдите производную		
1 $y=g(x)+x$	2 $y=\frac{\sqrt{x}}{g(x)}$	3 $y=\frac{g(x)}{2^x}$	4 $y=\frac{1-3x}{g(x)}$

3 Тест Найдите

результат	$\frac{5x^4}{6\sqrt[5]{x}}$	$-\frac{1}{25x^2}$	$\frac{x^4}{\sqrt[5]{x}}$	0	$\frac{24\sqrt[5]{x^{19}}}{5}$	$\frac{\sqrt[5]{x}}{x^4}$	$-\frac{x^2}{25}$	$\frac{6x^4}{5\sqrt[5]{x}}$
$\frac{1}{(x^{-5})'\cdot(x^5)'}$								
$\left(\sqrt[5]{x}\right)'\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)'$								
$\left(\frac{x^5}{\sqrt[5]{x}}\right)'$								
$\left(\frac{1}{x^5\cdot x^{-5}}\right)'$								

4 Тренажер	Найдите производную		
1 $\left(\frac{1}{\sin x-\sqrt{2}}\right)'$	2 $\left(\frac{1}{\cos x+3x}\right)'$	3 $\left(\frac{1}{\sin x-\cos x}\right)'$	4 $\left(\frac{1}{2^x-\sin x}\right)'$

Правила дифференцирования

5 Докажите, что

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

6 Докажите, что

если $y = \dfrac{\mathbf{k}}{\cos x}$, то $y' - \mathrm{tg}\, x \cdot y = 0$

7 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)' = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

8 Докажите, что

если $y = \dfrac{\sin x}{x}$, то $x\,y' + y = \cos x$

9 Тест Найдите

результат	$\ln 2$	$\ln^2 2$	$2+x$	$2x$	x^2	2^x	$x^2 \cdot e^x$	$2^x \cdot e^x$
$\dfrac{\left(x^2 \cdot e^x\right)'}{x \cdot e^x}$								
$\dfrac{\left(2^x \cdot x\right)'}{x \ln 2 + 1}$								
$\dfrac{\left(\ln 2 \cdot 2^x\right)'}{2^x}$								
$\dfrac{\left(2^x \cdot e^x\right)'}{\ln 2 + 1}$								

10 Решите задачу

Высота брошенного вверх тела меняется по закону

$$h = h_0 + \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Найдите

формулу зависимости изменения скорости движения тела от времени

Решите задачу **11**

формулу зависимости изменения ускорения движения тела от времени