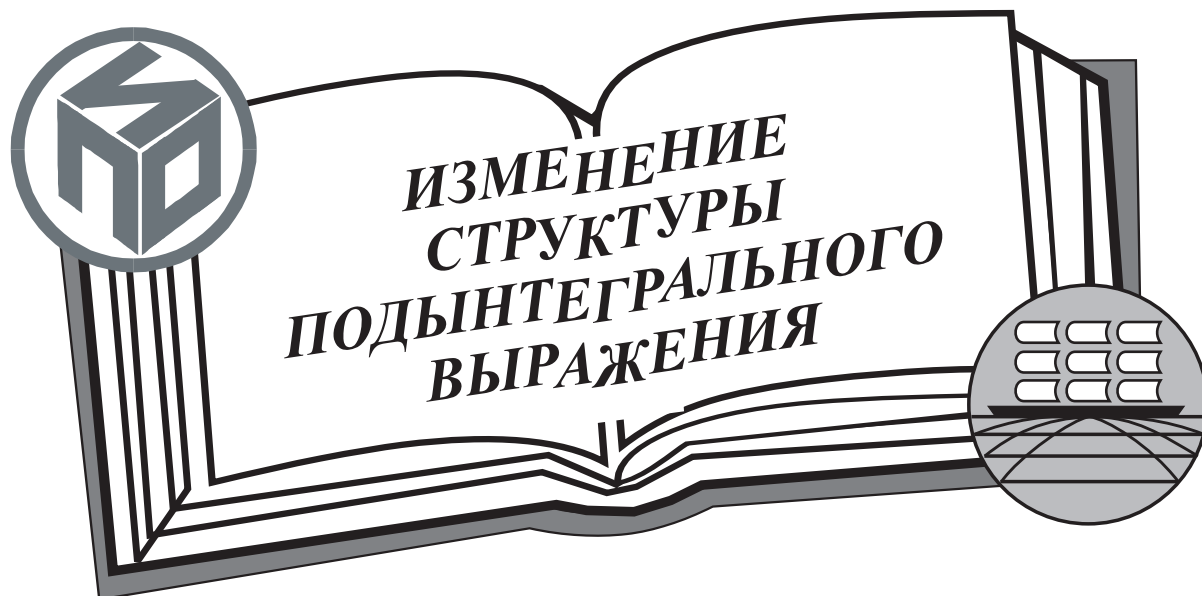




1. Разложение дроби на простейшие I типа	52
Деление многочлена на многочлен	52
2. Разложение дроби на простейшие II типа	54
Нахождение первого коэффициента в уравнении	
$\sum_{i=1}^n k_i x^{n-i} = \sum_{i=1}^n R_i (x-r)^{n-i}$	54
Метод неопределенных коэффициентов	54
3. Пример интегрирования дроби II типа	56
4. Выделение полного квадрата в приведенном квадратном трехчлене	58
Выделение полного квадрата в неприведенном квадратном трехчлене	58
5. Преобразование дроби с квадратичным знаменателем	60
Преобразование интеграла вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm px + q}$	60
6. Преобразование интеграла вида $\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2 \pm px + q}}$	62
7. Интегрирование дробей вида $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ и $\frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+px+q}}$	64
8. Разложение дроби на простейшие III типа	66
9. Пример разложения дроби на простейшие разных типов	68
10. Интегрирование дроби вида $\frac{f'(x)}{f(x)}$	70
Интегрирование дроби вида $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	70
Информационная схема	
«Преобразования структуры подынтегрального выражения»	72
Самостоятельная работа 3. Вариант 1	73
Вариант 2	73
Вариант 3	74

1

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ I ТИПА

Применяется, если
количество
простых множителей знаменателя
равно или больше трех

*Простейшая
дробь
I типа* $\frac{R}{x-r} \quad (R, r - \text{const})$

Рассмотрим конкретный случай:

$$\frac{kx^2 + mx + p}{\underbrace{(x-a)}_I \underbrace{(x-b)}_II \underbrace{(x-c)}_III} = \underbrace{\frac{A}{x-a}}_I + \underbrace{\frac{B}{x-b}}_II + \underbrace{\frac{D}{x-c}}_III$$

$$\Downarrow$$

$$kx^2 + mx + p = A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + D(x-a)(x-b)$$

$$\Downarrow$$

Коэффициенты A, B и D
находятся
методом подстановки

$$\int \frac{kx^2 + mx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx = A \cdot \ln|x-a| + B \cdot \ln|x-b| + D \cdot \ln|x-c| + C$$

ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Для удобства вычислений
выписываются
все степени переменной x
числителя

с соответствующими коэффициентами,
среди которых могут оказаться
и нулевые

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

Аналогично
делению
числителя на знаменатель
неправильной дроби

Остаток

$$\underbrace{Q_r x^r + \dots + Q_0}_S$$

$$D = \frac{\sum_{i=0}^n A_i x^i}{\sum_{j=0}^k B_j x^j} \quad (k \leq n)$$

$$B_k x^k + \dots + B_0$$

R
**Целая часть
дроби D**

$$\Downarrow$$

$$D = R + \frac{S}{\sum_{j=0}^r B_j x^j}$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

	Серия 1	Серия 2
	Разложите дробь на простейшие дроби	Найдите интеграл
$\frac{1}{x(x-1)}$		
$\frac{x}{(x-2)(x+1)}$		
$\frac{2x-1}{(x-1)x(x+2)}$		
$\frac{x^2}{(x+1)x(x-2)}$		
$\frac{2-x^2}{x(1-x^2)(x-2)}$		

МАТРИЦА 3	Для каждой дроби		
РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ I ТИПА	выделите целую часть	разложите на простейшие дроби	найдите интеграл
$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$			
$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$			
$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+4)}$			
$\frac{(2x-1)(3x-2)}{(4x-3)(3x-4)}$			
$\frac{(1-x)(1-3x)}{(1-2x)(4x-1)}$			

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

$$\frac{k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-1} x + k_n}{(x-a)^n}$$

Количество
множителей знаменателя
заданной дроби
равно
количеству
простейших дробей

Простейшая дробь II типа

$$\frac{\mathbf{R}}{(x-\mathbf{r})^n} \left(\begin{array}{l} \mathbf{\dot{R}}, \mathbf{r} - \text{const} \\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}, \mathbf{n} \neq 1 \end{array} \right)$$

$$\frac{\mathbf{k}_1 x^{n-1} + \mathbf{k}_2 x^{n-2} + \dots + \mathbf{k}_{n-1} x + \mathbf{k}_n}{(x - \mathbf{r})^n} =$$

Разложение на простейшие

$$= \frac{\mathbf{R}_1}{(x-\mathbf{r})^n} + \frac{\mathbf{R}_2}{(x-\mathbf{r})^{n-1}} + \dots + \frac{\mathbf{R}_{n-1}}{(x-\mathbf{r})^2} + \frac{\mathbf{R}_n}{(x-\mathbf{r})}$$

Каждой простейшей дроби –
соответствующий числовой коэффициент

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРВОГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i x^{n-i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i (x-\mathbf{r})^{n-i}$$

$$\mathbf{k}_1 x^{n-1} + \mathbf{k}_2 x^{n-2} + \dots + \mathbf{k}_{n-1} x + \mathbf{k}_n = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 (x-\mathbf{r}) + \dots + \mathbf{R}_{n-1} (x-\mathbf{r})^{n-2} + \mathbf{R}_n (x-\mathbf{r})^{n-1}$$

Подстановка

$$\mathbf{k}_1 \mathbf{r}^{n-1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{r}^{n-2} + \dots + \mathbf{k}_{n-1} \mathbf{r} + \mathbf{k}_n = \mathbf{R}_1$$

ПРИМЕР

Определите значение
коэффициента A
в разложении дроби

$$\frac{2x^2+1}{(x-2)^3} = \frac{\mathbf{A}}{(x-2)^3} + \frac{\mathbf{B}}{(x-2)^2} + \frac{\mathbf{C}}{x-2}$$

Решение

при $x=2$ $2 \cdot x^2 + 1 = A + B \cdot (x-2) + C \cdot (x-2)^2$

имеем

$$2 \cdot 2^2 + 1 = A + B \cdot 0 + C \cdot 0^2 \Rightarrow A = 9$$

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_1 x^m + \mathbf{B}_1 x^{m-1} + \mathbf{C}_1 x^{m-2} + \dots + \mathbf{R}_1 x + \mathbf{S}_1 = \\ & = \mathbf{A}_2 x^m + \mathbf{B}_2 x^{m-1} + \mathbf{C}_2 x^{m-2} + \dots + \mathbf{R}_2 x + \mathbf{S}_2 \end{aligned}$$



x^m	$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$
x^{m-1}	$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$
$\dots$	$\dots$
x^1	$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$
x^0	$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$

ПРИМЕР

$$\mathbf{9} + x^3 + \mathbf{5}x^2 = \mathbf{A}x^3 + \mathbf{B}(x^2 + x) + \mathbf{D}x + \mathbf{C}$$

$$\underline{x^3 + 5x^2 + 0x + 9} = \underline{\underline{Ax^3}} + \underline{Bx^2} + (\underline{B + D})x + \underline{C} \implies$$

x^3	1 = A
x^2	5 = B
x^1	0 = B + D $\Rightarrow$ D = -5
x^0	9 = C

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Тест 1	В разложении дроби $\frac{R(x)}{(x-a)^4} = \frac{A}{(x-a)^4} + \frac{B}{(x-a)^3} + \frac{C}{(x-a)^2} + \frac{D}{x-a}$ определите значение коэффициента А	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
	$\frac{x}{(x-1)^4}$													
	$\frac{x^2+x}{(x+2)^4}$													
	$\frac{x^3+3x^2+x}{(x+3)^4}$													
	$\frac{3-2x-x^2}{(x+4)^4}$													
	$\frac{1-x^3+5x^2+x}{(x-5)^4}$													

2	Определите значения коэффициентов	A	B	C
Т р е н а ж е р	1 $x^2 + x + 1 = A + B \cdot (x - 1) + C \cdot (x - 1)^2$			
	2 $x^2 - 1 = A + B \cdot (x - 2) + C \cdot (x - 2)^2$			
	3 $2x + 1 = A + B \cdot (x + 1) + C \cdot (x + 1)^2$			
	4 $x^2 - 2x - 1 = A + B \cdot (x - 2) + C \cdot (x - 2)^2$			
	5 $3x^2 + 2x + 1 = A + B \cdot x + C \cdot x^2$			

3

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДРОБИ II ТИПА

Найдите
интеграл $\int \frac{x^2+x}{(x-1)^3} dx$

А н а л и з

$$I = \int \frac{x^2+x}{(x-1)^3} dx = \int \frac{A dx}{(x-1)^3} + \int \frac{B dx}{(x-1)^2} + \int \frac{C dx}{x-1}$$

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Р е ш е н и е

Подстановка $x=1$ $\uparrow \uparrow$ $x^2+x = A + B(x-1) + C(x-1)^2$
 $1^2+1 = A \Rightarrow \boxed{A=1}$

Сравнение коэффициентов при x^2 $\downarrow$ $\boxed{x^2}+x = \boxed{1} + Bx - B + \boxed{Cx^2} - 2Cx + C$
 $\boxed{1} = C$

Сравнение коэффициентов при x $\downarrow$ $x^2+\boxed{x} = 1 + \boxed{Bx} - B + x^2 - 2x + 1$
 $\boxed{1} = B - 2 \Rightarrow \boxed{B=3}$

$$I = \int \frac{x^2+x}{(x-1)^3} dx = \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{3dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \ln|x-1| + C$$

разложите подынтегральную функцию на простейшие дроби		Для каждого интеграла		найдите первообразную	
1 Т р е н а ж е р	1		$\int \frac{x dx}{(x-1)^3}$		1
	2		$\int \frac{(x^2+1) dx}{x(x-1)^2}$		2
	3		$\int \frac{(x+1) dx}{x^2(x-1)}$		3
	4		$\int \frac{(x^2+1) dx}{(x+1)(x^2-1)}$		4
	5		$\int \frac{(x^3+x) dx}{(x-1)(x^2-1)}$		5
				2 Т р е н а ж е р	

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Серия **3**

Найдите интеграл

1 $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2} =$

2 $\int \frac{x+1}{x^3+3x^2+27x+27} dx =$

3 $\int \frac{x^2}{(x^2-4x+4)(x^2+6x+9)} dx =$

4 $\int \frac{(x^2+1)}{(x^2-2x+1)x^2} dx =$

5 $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-6x^2+12x-8} dx =$

4

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА В ПРИВЕДЕННОМ КВАДРАТНОМ ТРЕХЧЛЕНЕ

**Приведенный
квадратный трехчлен**

$$\begin{aligned}
 & x^2 \pm p x + q = \\
 \text{Определение элементов} & = \left(x^2 \pm 2 \cdot \boxed{x} \cdot \boxed{\frac{p}{2}} \right) + q = \\
 \text{полного квадрата} & \\
 \text{Выделение} & = \left[x^2 \pm 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q = \\
 \text{полного} & \\
 \text{квадрата} & \quad \text{Составление} \quad \text{Компенсация} \\
 & \quad \text{полного квадрата} \\
 & = \underbrace{\left(x \pm \frac{p}{2} \right)^2}_{\text{Полный квадрат}} + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{\pm a^2 \text{ «Свободный» параметр}}
 \end{aligned}$$

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА В НЕПРИВЕДЕННОМ КВАДРАТНОМ ТРЕХЧЛЕНЕ

**Неприведенный
квадратный трехчлен**

$$\begin{aligned}
 & A x^2 \pm B x + C = \\
 & = A \cdot \left(x^2 \pm \underbrace{\frac{B}{A}}_p x + \underbrace{\frac{C}{A}}_q \right) = \\
 & = A \cdot (x^2 \pm p x + q) = A \cdot \left[\underbrace{\left(x \pm \frac{p}{2} \right)^2}_{\text{Полный квадрат}} + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{\pm a^2} \right]
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\begin{aligned}
 & \int (3x^2 + 2x - 1) dx = \\
 & = 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx - \int dx \\
 & \text{Не требуются} \\
 & \text{дополнительные преобразования}
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{3x^2 + 2x - 1} = \\
 & = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{10}{9}} \quad \text{Дополнительные} \\
 & \quad \text{преобразования} \\
 & \quad \text{необходимы}
 \end{aligned}$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x + 4) dx &= \\ &= \int x^2 dx + \int (-3x) dx + \int 4 dx = \\ &= \int x^2 dx - 3 \int x dx + 4 \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C \end{aligned}$$

ПРИМЕР

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x + 4) dx &= \\ &= \int \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{16}{4} \right] dx = \\ &= \int \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 dx + \frac{7}{4} \int dx = \\ &= \frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{2} \right)^3 + \frac{7x}{4} + C \end{aligned}$$

*Сравните
результаты!*

Тест 1	Определите «свободный» параметр										
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x^2 + 2x + 5$											
$x^2 + 4x + 9$											
$x^2 + 6x + 12$											
$x^2 + 12x + 34$											
$x^2 + 14x + 48$											

Тренижер	1	$9x^2 - 6x + 1 =$	Выделите полный квадрат
	2	$4x^2 + 2x =$	
	3	$4x^2 - 2x + 3 =$	
	4	$2x^2 + 4x - 1 =$	
	5	$5x^2 + x - 1 =$	

5

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБИ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗНАМЕНАТЕЛЕМ

Т е о р и я

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A x^2 \pm B x + C} = \\ & = \frac{1}{A \left(x^2 \pm \frac{B}{A} x \right) + C} = \\ & = \frac{1}{A \left(x^2 \pm 2 \cdot \frac{B}{2A} x + \frac{B^2}{4A^2} \right) - \frac{B^2}{4A} + C} = \\ & = \frac{1}{A \left(x \pm \frac{B}{2A} \right)^2 + C - \frac{B^2}{4A}} = \\ & = \frac{1}{\left(\sqrt{A} x \pm \frac{B}{2\sqrt{A}} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}} = \\ & = \frac{1}{(\pm a^2)} \end{aligned}$$

Р е а л и з а ц и я

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3x^2 \pm 2x - 1} = \\ & = \frac{1}{3 \left(x^2 \pm \frac{2}{3} x \right) - 1} = \\ & = \frac{1}{3 \left(x^2 \pm 2 \cdot \frac{1}{3} x + \frac{1}{9} \right) - \frac{1}{3} - 1} = \\ & = \frac{1}{3 \left(x \pm \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{3}} = \\ & = \frac{1}{\left(\sqrt{3} x \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{4}{3}} \end{aligned}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ВИДА

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm px + q}$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\left(x \pm \frac{p}{2} \right)^2 + a^2} = \\ & = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x \pm \frac{p}{2}}{a} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^2 \pm px + q} = \\ & \pm \left(q - \frac{p^2}{4} \right) \\ & \pm a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\left(x \pm \frac{p}{2} \right)^2 - a^2} = \\ & = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x \pm \frac{p}{2} - a}{x \pm \frac{p}{2} + a} \right| + C \end{aligned}$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР

$$\int \frac{dx}{3x^2+2x-1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ln \left| \frac{x+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+3} \right| + C$$

1

Докажите,
что

интеграл $\int \frac{dx}{a^2 - p^2 - (kx)^2 + 2kpx}$

можно привести к виду,
удобному
для интегрирования

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$$

МАТРИЦА 2

Для каждого интеграла

**ВЫДЕЛЕНИЕ
ПОЛНОГО
КВАДРАТА**

выделите
в знаменателе
полный
квадрат

приведите
подынтегральную
функцию
к виду, удобному для
интегрирования

найдите
первообразную

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}$$

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 12x + 5}$$

$$\int \frac{dx^2}{2x^4 - x^2 + 1}$$

$$\int \frac{d\sqrt{x}}{3x - \sqrt{x} + 2}$$

6

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ВИДА

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2 \pm px + q}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm px + q}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 + a^2}} =$$

$$= \ln \left| x \pm \frac{p}{2} + \sqrt{\left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} \right| + C$$

$$= \ln \left| x \pm \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q} \right| + C$$

$$\underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{a^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 \pm px + q}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 \mp px - q)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2}} =$$

$$+ \arcsin \frac{x \pm \frac{p}{2}}{a} + C \quad - \arccos \frac{x \pm \frac{p}{2}}{a} + C$$

ПРИМЕР

Найдите интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 4x^2 - 8}}$$

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 12x - 8}} =$$

Приведение
трехчлена
к стандартному виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-(4x^2 - 12x) - 8}} =$$

Изменение знака

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-(4x^2 - 12x + 9) + 9 - 8}} =$$

Выделение
полного квадрата

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(2x - 3) + C$$

Преобразование
к виду,
удобному для интегрирования

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

МАТРИЦА 1	Для каждого интеграла		
	выделите под корнем полный квадрат	приведите подынтегральную функцию к табличному виду	найдите первообразную
$\int \frac{dx}{\sqrt{2(1-x)^2+1}}$			
$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+4}}$			
$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+2}}$			
$\int \frac{dx}{\sqrt{6-4(x-1)^2}}$			
$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x-2x^2}}$			

7

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБЕЙ ВИДА

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad \text{И} \quad \frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x + \frac{2N}{M}}{x^2 + px + q} dx =$$

Выделение в числителе
производной
знаменателя

$$= \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p) + \left(\frac{2N}{M} - p\right)}{x^2 + px + q} dx =$$

$$\int \frac{R'(x)}{R(x)} dx =$$

$$= \ln|R(x)| + C$$

$$= \frac{M}{2} \left[\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(\frac{2N}{M} - p\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \right] =$$

Выделение
полного квадрата

$$= \frac{M}{2} \left[\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{M} \underbrace{\hspace{1cm}}_{\downarrow} \right] = \dots$$

Аналогично
для дроби вида $\frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+px+q}}$

ПРИМЕР

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+7x+1}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + \frac{5}{3}}{\sqrt{x^2+7x+1}} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+7) + \left(\frac{10}{3} - 7\right)}{\sqrt{x^2+7x+1}} dx =$$

$$\int \frac{R'(x)}{\sqrt{R(x)}} dx =$$

$$= 2\sqrt{R(x)} + C$$

$$= \frac{3}{2} \left[\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+7x+1}} dx - \frac{11}{3} \int \frac{d\left(x + \frac{7}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{7^2}{4}\right)}} \right] =$$

$$= \frac{3}{2} \left[2\sqrt{x^2+7x+1} - \frac{11}{3} \cdot \ln \left| x + \frac{7}{2} + \sqrt{x^2+7x+1} \right| \right] + C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Выделите в числителе производную знаменателя дроби		Выделите полный квадрат в знаменателе дроби	
1 Т р е н а ж е р	1	$\frac{2x-3}{x^2-2x-2}$	1
	2	$\frac{4x-3}{x^2-2x+2}$	2
	3	$\frac{x-3}{2x^2-x+2}$	3
	4	$\frac{5x+7}{x^2+5x+7}$	4
	5	$\frac{3x+1}{x-7x^2+1}$	5

Серия 3	Приведите подынтегральное выражение		Серия 4
	к виду, удобному для интегрирования		и найдите интеграл
	1	$\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+2x+3}$	1
	2	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-3x+1}$	2
	3	$\int \frac{(3x-2)dx}{x^2+x+1}$	3
	4	$\int \frac{(5x-2)dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}$	4
	5	$\int \frac{(1-3x)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$	5

8

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ III ТИПА

$$\frac{R(x)}{(x^2+px+q)(x^2+mx+n)} =$$

Число множителей знаменателя
равно
количеству простейших дробей

$$= \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)} + \frac{Mx+N}{(x^2+mx+n)}$$

Для каждой дроби –
свой **квадратичный** знаменатель
свой **линейный** числитель

Простейшая дробь III типа

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \left(\begin{matrix} M, N \\ p, q \end{matrix} \right) - \text{const}$$

$$[D = p^2 - 4q < 0]$$

Параметры числителей
простейших дробей
находятся
методом
неопределенных коэффициентов

ПРИМЕР

$$\int \frac{5x^3+21x+8}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \underbrace{\int \frac{Ax+B}{(x^2+1)} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{Mx+N}{(x^2+9)} dx}_{I_2} = I$$

$$5x^3+21x+8 = (Ax+B)(x^2+9) + (Mx+N)(x^2+1)$$

$$\underline{5x^3} + \underline{0x^2} + \underline{21x} + \underline{8} = \underline{Ax^3} + \underline{Bx^2} + \underline{9Ax} + \underline{9B} +$$

$$+ \underline{Mx^3} + \underline{Nx^2} + \underline{Mx} + \underline{N}$$

$\underline{x^3}$	$5 = M + A \Rightarrow M = 5 - A \Rightarrow M = 3$
$\underline{x^2}$	$0 = B + N \Rightarrow B = -N \Rightarrow N = -8$
$\underline{x^1}$	$21 = 9A + M \Rightarrow 21 = 8A + \underbrace{M+A}_5 \Rightarrow A = 2$
$\underline{x^0}$	$8 = 9B + N \Rightarrow 8 = B + \underbrace{B+N}_0 \Rightarrow B = 8$

$$I_1 = \int \frac{2x-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \int \frac{2x dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I_2 = \int \frac{3x+1}{(x^2+9)} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+9} + \int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$I = \ln(x^2+1) - \text{arctg}(x^2+1) + \frac{3}{2} \ln(x^2+9) + \frac{1}{3} \text{arctg}(x^2+1) + C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Тест 1	$\frac{R(x)}{(x^2+4)(x^2+25)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Mx+N}{x^2+25}$	A	3	3	1	1	1	2	2
		B	1	1	2	3	3	3	1
		M	2	2	1	3	2	3	3
		N	1	4	1	2	1	2	1
	$R(x) = 5x^3 + 5x^2 + 62x + 83$								
	$R(x) = 2x^3 + 3x^2 + 29x + 52$								
	$R(x) = 5x^3 + 5x^2 + 83x + 41$								
	$R(x) = 5x^3 + 2x^2 + 83x + 29$								
	$R(x) = 5x^3 + 2x^2 + 62x + 29$								

2	запишите разложение на простейшие		Для каждой дроби	найдите первообразную		3
	1				1	
	2				2	
	3				3	
	4				4	
	5				5	
Тренижер		$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$ $\frac{x-3}{(x^2+1)(x^2+2)}$ $\frac{2x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+2)}$ $\frac{4x^3+2x^2+5x+7}{(x^2+1)(x^2+2)}$ $\frac{2x^3+3x}{(x^2+1)(x^2+2)}$		Тренижер		

9

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР РАЗЛОЖЕНИЯ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ РАЗНЫХ ТИПОВ

Разложите
дробь $R = \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}$ на простейшие
и найдите интеграл

А н а л и з

$$\underbrace{\frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}}_{\text{«Правильная» дробь}} = \underbrace{\frac{A}{x+2}}_{\text{Метод подстановки}} + \underbrace{\frac{Mx+N}{x^2+x+1}}_{\text{Метод неопределенных коэффициентов}}$$

Р е ш е н и е

Метод
подстановки

$$2x^2+x+3 = A \cdot (x^2+x+1) + (Mx+N) \cdot (x+2)$$

$$x = 2 \Rightarrow 2 \cdot 4 - 4 + 3 = A \cdot (4 - 2 + 1) \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

Метод
неопределенных
коэффициентов

$$\begin{aligned} 2x^2 + \underline{x} + \underline{3} &= 3x^2 + \underline{3x} + \underline{3} + \\ &+ \underline{Mx^2} + \underline{(N+2M)x} + \underline{2N} \end{aligned}$$

$\underline{x^0}$	$3 = 3 + 2N \Rightarrow \boxed{N = 0}$
$\underline{x^1}$	$1 = 3 + 0 + 2M \Rightarrow \boxed{M = -1}$

$$R = \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{3}{x+2} - \frac{x}{x^2+x+1}$$



$$\int R(x) dx = \int \left[\frac{3}{x+2} - \frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right] dx =$$

$$= 3 \ln |x+2| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Серия 1

Найдите интеграл

1 $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} =$

2 $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2-5x+6)} =$

3 $\int \frac{dx}{x^3+1} =$

4 $\int \frac{x dx}{x^3-1} =$

5 $\int \frac{(x^5+x^4-8)dx}{x^3-4x} =$

10

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ ВИДА $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{f(x)} df(x) = \ln|f(x)| + C$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ ВИДА $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} df(x) = 2\sqrt{f(x)} + C$$

*При интегрировании любой дроби
полезно предварительно исследовать ее
на наличие в числителе
производной от функции в знаменателе!*

ПРИМЕР

$$\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{7 - \cos 3x}} = \frac{(7 - \cos 3x)'}{\sqrt{7 - \cos 3x}} = \frac{3 \sin 3x}{\sqrt{7 - \cos 3x}} = \frac{1}{3} \int \frac{3 \sin 3x dx}{\sqrt{7 - \cos 3x}} = \frac{2}{3} \sqrt{7 - \cos 3x} + C$$

ПРИМЕР

$$I = \int \frac{4 \cos t + 6}{\cos^2 t + 3 \cos t + 1} d \cos t = ?$$

Р е ш е н и е

$$I = \int \frac{4x + 6}{x^2 + 3x + 1} dx = \int \left[\frac{4x + 6}{x^2 + 3x + 1} \right] + \frac{1}{x^2 + 3x + 1} dx =$$

$$\cos t = x$$

$$= \int \frac{4x + 7}{x^2 + 3x + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 3x + 1} dx =$$

$$= 2 \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + \frac{1}{4}} dx + \int \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 2} dx =$$

$$= 2 \ln \left| x^2 + 3x + \frac{1}{4} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{2} - \sqrt{2}}{x + \frac{3}{2} + \sqrt{2}} \right| + C =$$

$$= 2 \ln 2 \left| 4x^2 + 12x + 1 \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2x + 3 - 2\sqrt{2}}{2x + 3 + 2\sqrt{2}} \right| + C$$

$$x = \cos t$$

$$I = 2 \ln 2 \left| 4 \cos^2 t + 12 \cos t + 1 \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2 \cos t + 3 - 2\sqrt{2}}{2 \cos t + 3 + 2\sqrt{2}} \right| + C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Для интеграла вида $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ или $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$		восстановите числитель подынтегральной функции	найдите результат интегрирования
1	$\int \frac{?}{\cos^2 x} dx$	1	2
2	$\int \frac{?}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} dx$	Т р е н а ж е р	
3	$\int \frac{?}{\sqrt{2 + \cos 2x}} dx$		
4	$\int \frac{?}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$		
5	$\int \frac{?}{\sin \cos x} dx$		

Тест 5	можно получить по формуле				нельзя получить по формуле
Результат интегрирования	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$ при умножении на число	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$ или $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$
$\int \frac{\sin x dx}{1 - \cos x}$					
$\int \frac{(\cos x - 1)dx}{\sqrt{x - \sin x}}$					
$\int \frac{\cos x \sin x dx}{\sqrt{\sin^2 x - 2}}$					
$\int \frac{(\cos x - \sin 2x + 1)dx}{\sin x + 2\cos x + x}$					
$2 \int \left(\frac{\sin 2x}{2} + \cos 2x - x \right) dx$ $\sin^2 x + \sin 2x - x^2$					

Информационная схема
«ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ»

Выделение полного квадрата

$$A x^2 \pm B x + C = A \cdot \left(x^2 \pm \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} \right) = A \cdot \left(x^2 \pm p x + q \right) = A \cdot \left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right]$$

Полный квадрат $\pm a^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p x + q}} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm p x + q} =$$

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x + \frac{2N}{M}}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{(2x + p) + \left(\frac{2N}{M} - p \right)}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx =$$

$(x^2 + px + q)' = 2x + p$

Аналогично для

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$$

$$\int \frac{R'(x)}{\sqrt{R(x)}} dx = 2\sqrt{R(x)} + C$$

$$\int \frac{R'(x)}{R(x)} dx = \ln |R(x)| + C$$

Простейшие дроби

I тип

$$\frac{R}{x - r} \quad r - \text{const}$$

$$\frac{k_1 x^{n-1} + \dots + k_{n-1}}{(x - a_1) \dots (x - a_n)} =$$

Метод подстановки

$$= \frac{R_1}{(x - a_1)^n} + \dots + \frac{R_n}{(x - a_n)}$$

II тип

$$\frac{R}{(x - r)^n}$$

Методы подстановки и неопределенных коэффициентов

$$= \frac{R_1}{(x - r)^n} + \dots + \frac{R_{n-1}}{(x - r)^2} + \frac{R_n}{(x - r)}$$

III тип

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad \left(\begin{matrix} M, N \\ p, q \end{matrix} \right) - \text{const}$$

$[D = p^2 - 4q < 0]$

$$\frac{R(x)}{(x^2 + px + q)(x^2 + mx + n)} =$$

Метод неопределенных коэффициентов

$$= \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)} + \frac{Mx + N}{(x^2 + mx + n)}$$

$R, r - \text{const}$
 $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1	$\int \frac{d(2t)}{4t^2 + 4t + 2} =$
2	$\int \frac{dy}{\sqrt{7 + 6y - y^2}} =$
3	$\int \frac{x+1}{x^3 + 5x^2 + 6x} dx =$
4	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx =$
5	$\int \frac{dx}{2x^2 - 8x - 10} =$
6	$\int \frac{x^3+x}{x^3-8} dx =$
7	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} =$

Вариант 2

1	$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2x} =$
2	$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3\cos^2 x + 6\sin x}} =$
3	$\int \frac{d\sqrt{2m}}{\sqrt{4m + 2\sqrt{m} - 1}} =$
4	$\int \frac{x dx}{1-x^4} =$
5	$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4} =$
6	$\int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \cdot \frac{dx}{x} =$
7	$\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+1} =$

Самостоятельная работа 3

Вариант 3

$$1 \quad \int \frac{e^{2x-1} dx}{e^{2x-1} - 1}$$

$$2 \quad \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^4 x}} =$$

$$3 \quad \int \frac{x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 28x - 20}{(x+2)(x^2 + 6x + 13)} dx =$$

$$4 \quad \int \frac{3x - x^2 - 2}{(x+1)^2} d \ln x =$$

$$5 \quad \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{ctg} x \sqrt{5 + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}} dx =$$

$$6 \quad \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2} =$$

$$7 \quad \int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx =$$

Использованная литература

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Наука., Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
3. Данко Е.П., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов: В 2 ч. Ч 1. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 8-е изд., стереотип. – М.: Наука., Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.
5. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие /Вавилов В.В., Мельников И.И, Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Подынтегральная функция и ее аргумент	4
2. Таблица интегралов	6
3. Главный принцип использования таблицы	8
Основные свойства неопределенного интеграла	8
4. Особенность интегрирования функции $f(x \pm p)$	10
5. Влияние числового множителя аргумента подынтегральной функции на результат интегрирования	12
6. Обратные тригонометрические функции и логарифмы в качестве первообразных	14
7. Расширение таблицы интегралов	16
«Свободный» параметр в интеграле вида $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	16
«Свободный» параметр в интеграле вида $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$	17
8. Структура табличных выражений с параметром	18
9. Важное свойство табличного интеграла	20
10. Корректировка переменной интегрирования в интеграле со «свободным» параметром	22
Информационная схема «Анализ структуры табличного интеграла»	24
Самостоятельная работа 1. Вариант 1	25
Вариант 2	25
Вариант 3	26

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1. Линейность операции интегрирования	28
2. Важные формулы для различных приложений	30
Значение синусов и косинусов замечательных углов	30
Четность тригонометрических функций	30
3. Формулы двойного угла	32
Интегрирование произведения четных степеней синуса и косинуса	32
4. Символическое обозначение преобразования дифференциала	34
Преобразование дифференциала	34
5. Алгоритм преобразования дифференциала	36
6. Интегрирование нечетных степеней синуса и косинуса	38
Сопутствующие формулы	38
Интегрирование произведения степеней синуса и косинуса	38
7. Следствия из основных тригонометрических тождеств	40

СОДЕРЖАНИЕ

8. Замена переменной интегрирования	42
9. Повторные преобразования дифференциала	44
Информационная схема	
«Элементарные преобразования подынтегральной функции»	46
Самостоятельная работа 2. Вариант 1	47
Вариант 2	47
Вариант 3	48

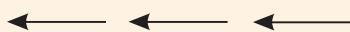
ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

1. Разложение дроби на простейшие I типа	50
Деление многочлена на многочлен	50
2. Разложение дроби на простейшие II типа	52
Нахождение первого коэффициента в уравнении	
$\sum_{i=1}^n k_i x^{n-i} = \sum_{i=1}^n R_i (x-r)^{n-i}$	52
Метод неопределенных коэффициентов	52
3. Пример интегрирования дроби II типа	54
4. Выделение полного квадрата в приведенном квадратном трехчлене	56
Выделение полного квадрата в неприведенном квадратном трехчлене	56
5. Преобразование дроби с квадратичным знаменателем	58
Преобразование интеграла вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm px + q}$	58
6. Преобразование интеграла вида $\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2 \pm px + q}}$	60
7. Интегрирование дробей вида $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ и $\frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+px+q}}$	62
8. Разложение дроби на простейшие III типа	64
9. Пример разложения дроби на простейшие разных типов	66
10. Интегрирование дроби вида $\frac{f'(x)}{f(x)}$	68
Интегрирование дроби вида $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	68
Информационная схема	
«Преобразования структуры подынтегрального выражения»	70
Самостоятельная работа 3. Вариант 1	71
Вариант 2	71
Вариант 3	72
Использованная литература	73

Дифференцирование		
$f'(x)$	$\longleftrightarrow \longleftrightarrow \longleftrightarrow$	$f(x)$
k	$kx + p$	$k \frac{x^2}{2} + px$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n+1)x^{n-1}}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$-\frac{1}{x^2 \cdot \ln a}$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a x $
$a^x \cdot \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x	e^x
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x $
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x $
$-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos x} = \sec x$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $
$\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right $
Интегрирование		
$f(x)$	$\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$	$\int f(x) dx + C$

Дифференцирование

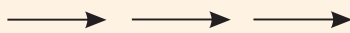
$f'(x)$



$f(x)$

$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctg x$ $-\operatorname{arcc}tg x$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$ $-\frac{1}{a} \operatorname{arcc}tg \frac{x}{a}$
$\frac{1}{x^2 - 1}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right $
$\frac{1}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right $
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $-\arccos x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$ $-\arccos \frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right $
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right $

$f(x)$



$\int f(x) dx$

Интегрирование

$+ C$

Неопределенный интеграл

Визуальный конспект-практикум

Выпуск I

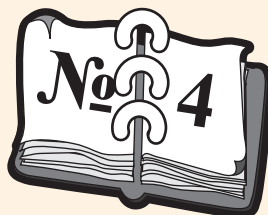
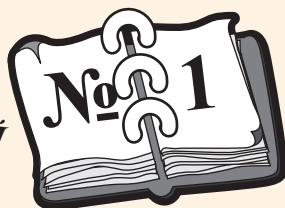
**Начальные
представления
о технике
интегрирования**

Выпуск II

Часть I

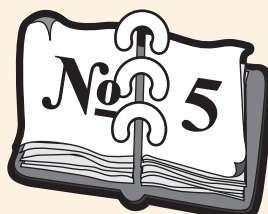
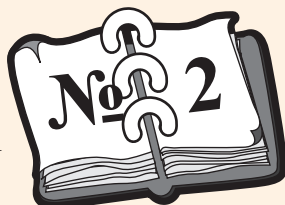
**Простейшие
методы
интегрирования**

**ПЕРВООБРАЗНАЯ
И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ
ИНТЕГРАЛ**



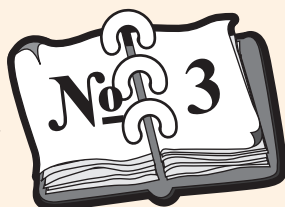
**АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ
ТАБЛИЧНОГО
ИНТЕГРАЛА**

**ЛИНЕЙНОСТЬ
ОПЕРАЦИИ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ**



**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ
ФУНКЦИИ**

**ПАРАМЕТРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ
ФУНКЦИИ**

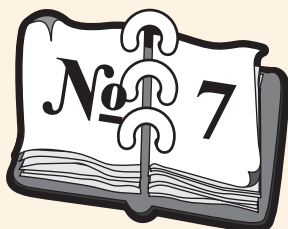


**ИЗМЕНЕНИЕ
СТРУКТУРЫ
ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО
ВЫРАЖЕНИЯ**

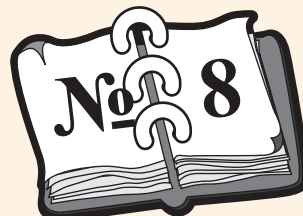
Выпуск II

Часть 2

**Общие методы
и частные приемы
интегрирования**



**ОБЩИЕ
МЕТОДЫ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ**



**ЧАСТНЫЕ
ПРИЕМЫ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ**