

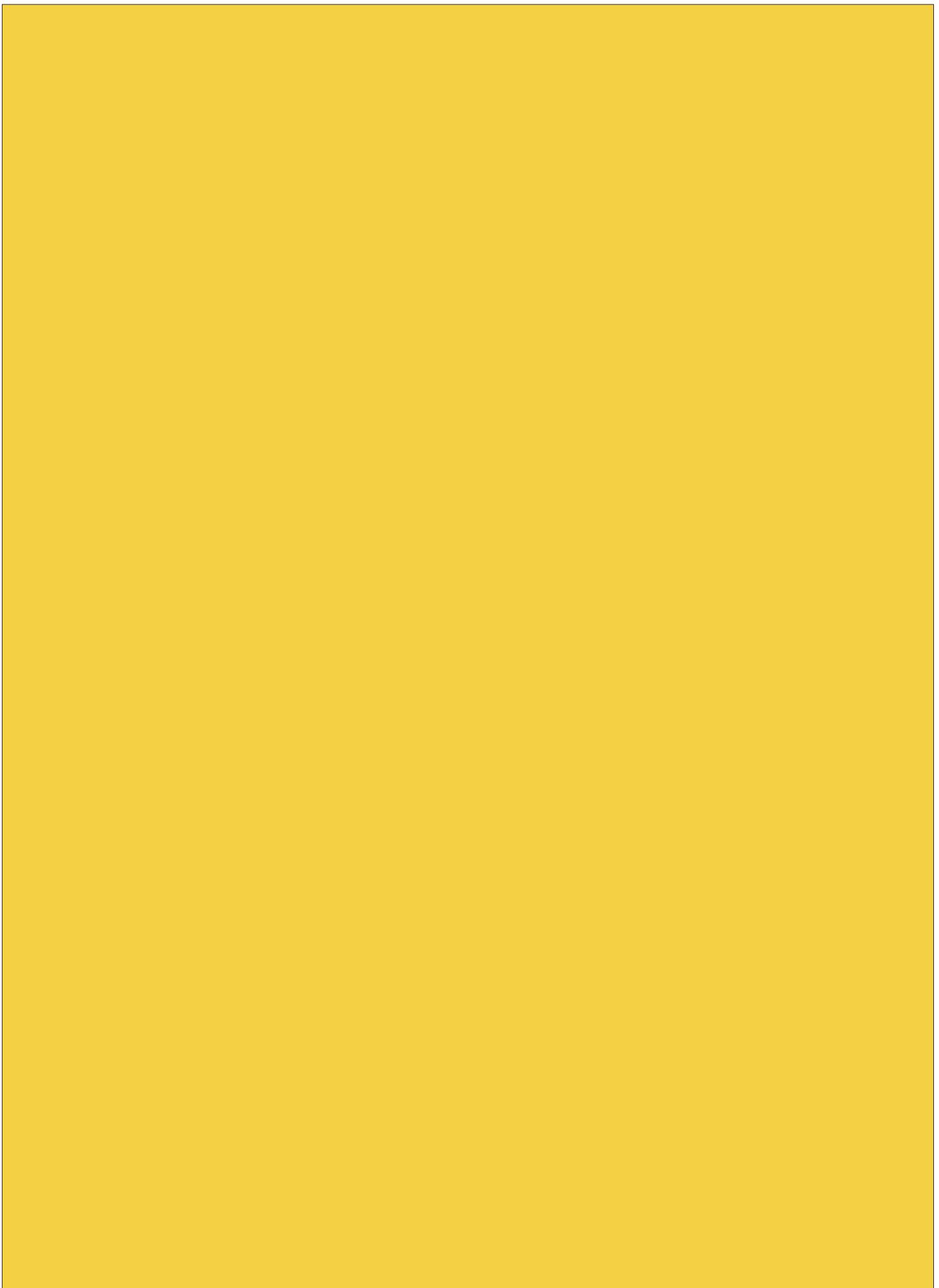
Н.А. РЕЗНИК

*Неопределенный
интеграл*

Визуальный
конспект-практикум

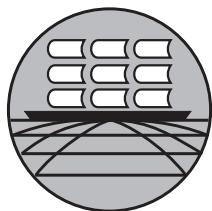
Выпуск I

*Начальные представления
о технике интегрирования*





ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ
МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Н.А. РЕЗНИК

Неопределенный интеграл

Визуальный
конспект-практикум

Выпуск I

*Начальные представления
о технике интегрирования*

Мурманск
1998

УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А. Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум. Вып. I. Начальные представления о технике интегрирования – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 82 с.

Первый выпуск визуального конспекта-практикума ориентирован на формирование начальных представлений по разделу "Неопределенный интеграл" курса высшей математики. Конспект разработан для студентов 1-го курса Мурманского государственного технического университета. В сборнике имеется более 300 задач и упражнений различного уровня сложности. Избыточность банка задач сформирована с целью помочь обучающимся вспомнить основные положения соответствующей темы "Алгебра и начала анализа", а также восстановить утраченные знания и навыки по другим разделам школьного курса математики. Большинство примеров пособия могут быть использованы в качестве дидактических материалов в 11-х классах средних общеобразовательных школ.

Математическое редактирование, а также составление самостоятельных работ и ответов ко всем задачам практикума осуществлено Казаковой Г.Б., которая является полноправным соавтором данной работы.

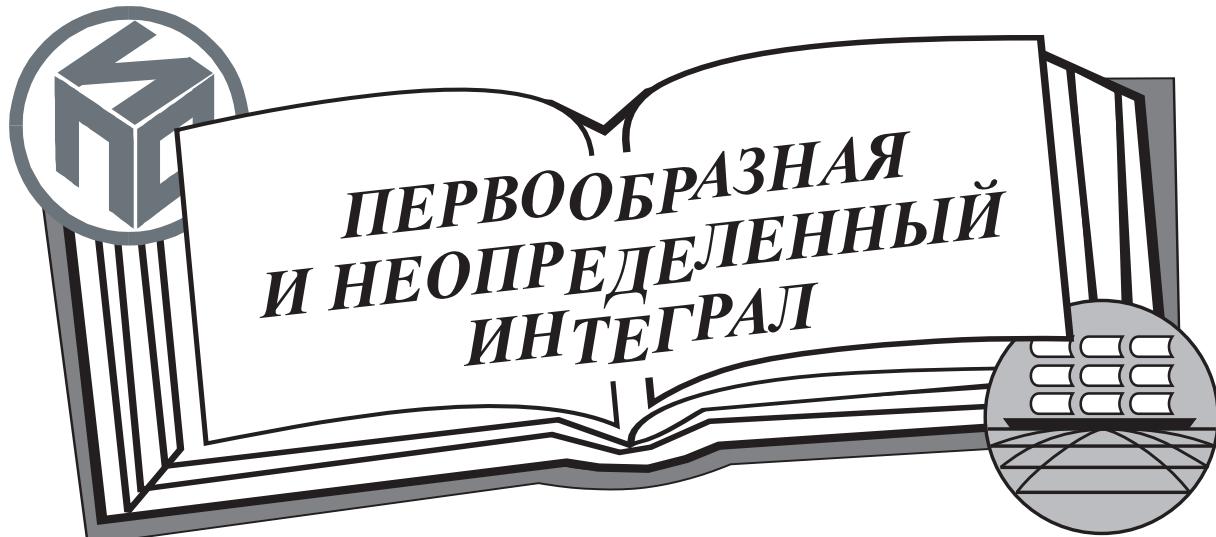
© Наталия Александровна Резник, 1998
Галина Борисовна Казакова, 1998
© Мурманский государственный технический университет, 1998

Наталия Александровна Резник,
Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум

© Компьютерный набор, верстка и графика Н.А. Резник
Редактор Е.В. Смирнова
Корректор Т.А. Пехтерева

Подписано в печать 15.06.08 г.
Зак. 561 Тир. 120 Печ .л. 2,32

ISBN 5-86185-087-9



1. Основные задачи	4
Введение первообразной	4
2. Связь между функцией и ее дифференциалом	6
Определение первообразной	6
Первообразная и дифференциал	6
3. Множество первообразных	8
Связи между первообразными одной и той же функции	8
Таблица первообразных	9
4. Неопределенный интеграл как множество первообразных	10
Объединение таблиц производных и интегралов	10
Расширенная таблица производных и интегралов	11
5. Структура неопределенного интеграла	12
Основные свойства неопределенного интеграла	12
6. Независимость функции от обозначения ее аргумента	14
Важное свойство таблицы интегралов	14
Интегрирование функции $f(kx+p)$	14
Информационная схема «Первообразная и неопределенный интеграл» ..	16
Самостоятельная работа 1. Вариант 1	17
Вариант 2	17
Вариант 3	18

1

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

$$\underbrace{[F(x)]'}_{\text{задана}} = \underbrace{f(x)}_{\text{ищем}}$$

↓ ↑
Основная задача дифференцирования

Основная задача:
дифференцирование

По заданной $F(x)$ находится $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

Обратная задача:
интегрирование

По заданной $f(x)$ находится $F(x)$: $f(x) = F'(x)$

$$\underbrace{[F(x)]'}_{\text{ищем}} = \underbrace{f(x)}_{\text{задана}}$$

↓ ↑
Основная задача интегрирования

ВВЕДЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

$$F(x), f(x): x \in \langle a; b \rangle$$

$$\underbrace{[F(x)]'} = \underbrace{f(x)}$$

Первообразная
для $f(x)$

Производная
от $F(x)$

$$\underbrace{[F(x) + C]}' = \overbrace{f(x)}$$

*C –
произвольная
постоянная*

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРИМЕР

$$[\underbrace{\sin x}]' = \underbrace{\cos x}$$

Основная задача
дифференцирования

Для $\sin x$ имеем: $\sin' x = \cos x$



$\sin x, \cos x: x \in (-\infty; +\infty)$



Для $\cos x$ имеем: $\cos x = \sin' x$

$$[\underbrace{\sin x}]' = \underbrace{\cos x}$$

Основная задача
интегрирования

ПРИМЕР

$$[\underbrace{\sin x}]' = \underbrace{\cos x}$$

Первообразная
для $\cos x$

Производная
от $\sin x$

$$\begin{aligned} [\sin x + 1]' &= \cos x \\ [\sin x + 10]' &= \cos x \\ [\sin x - 100]' &= \cos x \end{aligned}$$

Первообразная
для $\cos x$

Производная
от $\sin x$

$$[\underbrace{\sin x + C}]' = \underbrace{\cos x}$$

C – произвольная постоянная

2

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЕЙ И ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ

$$\left[F(x) \right]' = \\ = f(x)$$

$$F(x), f(x): x \in \langle a; b \rangle \\ F'(x) = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x) dx$$

$$dF(x) = \\ = f(x) dx$$

производной

Операция нахождения

дифференциала

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

$F(x)$
называется
первообразной для $f(x)$,
если
 $F'(x) = f(x)$



$$dF(x) = \\ = F'(x) dx = f(x) dx$$



$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x) dx \\ \forall x \in \langle a; b \rangle$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

$$\left. \begin{array}{l} f(x), F(x): \forall x \in \langle a; b \rangle \\ F(x): \\ F'(x) = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow d\underbrace{F(x)}_{\substack{\text{Нахождение} \\ \text{первообразной} \\ \text{для функции} \\ f(x)}} = F'(x) dx = \underbrace{f(x) dx}_{\substack{\text{дифференциала} \\ \text{от функции} \\ F(x)}}$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Восстановите отсутствующие данные
в таблице производных
 $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx$

1	$(\quad)' = \cos x$
1	$(\sqrt{x})' =$
2	$(\quad)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
3	$\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]' =$
4	$(-\ln \cos x)' =$
5	

1	$d(\quad) = \sin x dx$
2	$d\sqrt{x} = dx$
3	$d\quad = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$
4	$d \ln x =$
5	$d \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} =$

Оформите равенство
 $d f(x) = f'(x)dx$

3	1	$d \sin x =$
Тренинг	2	$d \sin 2x =$
	3	$d \sin \frac{x}{2} =$
	4	$d \sin \sqrt{x} =$
	5	$d \sin \frac{1}{x} =$

4	1	$d \sin x^2 =$
Тренинг	2	$d \cos(x+1) =$
	3	$d \operatorname{tg} \frac{1}{x^2} =$
	4	$d \arctg \sqrt{x} =$
	5	$d \arccos \frac{1}{x} =$

5 Докажите, что $d \frac{a^x}{\ln a} = a^x dx$

6 Докажите, что $d \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{x^2-1} dx$

3

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

$$\forall x \in \langle a ; b \rangle$$

$$F(x), f(x) :$$

$$F'(x) = f(x)$$



$F(x)$ – первообразная для $f(x)$



$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$$

где C – произвольная постоянная



$F(x) + C$ – первообразная для $f(x)$



$F(x) + C$ – множество первообразных для $f(x)$ $\forall x \in \langle a ; b \rangle$,
где C – произвольная постоянная

СВЯЗИ МЕЖДУ ПЕРВООБРАЗНЫМИ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФУНКЦИИ

Пусть
 $F_1(x), F_2(x), f(x)$:

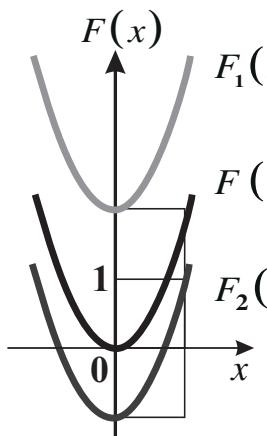
$$\left. \begin{array}{l} F'_1(x) = f(x) \\ F'_2(x) = f(x) \\ F'_1(x) \neq F'_2(x) \end{array} \right\} \forall x \in \langle a; b \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} F'_1(x) = F'_2(x) \\ \downarrow \\ \Rightarrow F'_1(x) - F'_2(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = \\ \downarrow \\ = 0 = [C] \\ F_1(x) - F_2(x) = C \quad \forall x \in \langle a; b \rangle \end{array} \right\}$$

*Две различные первообразные одной и той же функции,
определенной в некотором промежутке,
с одинаковой производной
(отличаются друг от друга на const)*

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРИМЕР



$$F_1(x) = x^2 + 2 \implies F_1'(x) = 2x$$

$$F(x) = x^2 \implies F'(x) = 2x$$

$$F_2(x) = x^2 - 1 \implies F_2'(x) = 2x^2$$

$$(x^2 + C)' = 2x \quad \forall x \in R$$

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$$

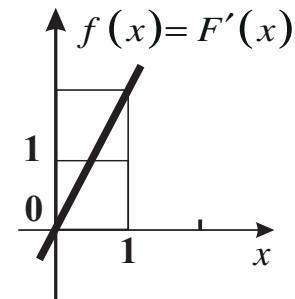


ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

$f(x)$	\rightarrow	$F(x) + C$
nx^{n-1}		$x^n + C$
$\frac{1}{x}$		$\ln x + C$
$\cos x$		$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$		$\frac{1}{1+x^2} + C$

Функция,
для которой
находится
первообразная



Множество
первообразных
для исходной
функции

Серия 1 Восстановите
отсутствующие данные
в оформлении перехода
от функции
к ее первообразной

- | | |
|---|--|
| 1 | $2x \rightarrow$ <input type="text"/> |
| 2 | $3x^{\square} \rightarrow x^3$ |
| 3 | $\square x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow x^{\frac{1}{2}}$ |
| 4 | $3x^{\square} \rightarrow 9x^{\frac{1}{3}}$ |
| 5 | <input type="text"/> $\rightarrow x^{-\frac{4}{5}}$ |

4

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

$$\int f(x) dx = \underbrace{F(x) + C}_{\begin{array}{c} \text{неопределенный} \\ \text{интеграл} \\ \text{функции } f(x) \end{array}} \iff \left[\underbrace{F(x) + C}_{\begin{array}{c} \text{множество} \\ \text{всех первообразных} \\ \text{для } f(x) \end{array}} \right]' = f(x)$$

*Нахождение
первообразной
для $f(x)$*

C – заранее
не определено

*Нахождение
производной
от $F(x)$*

**Операция нахождения
множества первообразных для заданной функции
называется
интегрированием**

ОБЪЕДИНЕНИЕ ТАБЛИЦ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f'(x)$		$f(x)$
$kx + p$		$k\frac{x^2}{2} + px$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$f(x)$		$F(x)$	$+C$
$kx + p$		$k\frac{x^2}{2} + px$	

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ



ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

РАСШИРЕННАЯ ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Производная		Первообразная $+C$
$f'(x)$	\rightarrow	$f(x)$ \leftarrow $\int f(x)dx$
k	$kx + p$	$k\frac{x^2}{2} + px$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x $
$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

Запишите

неопределенный интеграл
как множество первообразных

2

Т
р
е
н
а
ж
е
р

1 $\int x^3 dx =$

2 $\int \frac{1}{x} dx =$

3 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

4 $\int \frac{1}{1+x^2} dx =$

5 $\int \cos x dx =$

3 Докажите,
что

$$\int \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{p} \right) dx = \frac{x^2}{2k} - \frac{x}{p} + C$$

4 Докажите,
что

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

5 Докажите,
что

$$\int \frac{2x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + C$$

1

Т
р
е
н
а
ж
е
р

Запишите
неопределенный интеграл
как множество первообразных

1 $\int (kx + p) dx$

2 $\int (3x + 2) dx$

3 $\int (2x + 3) dx$

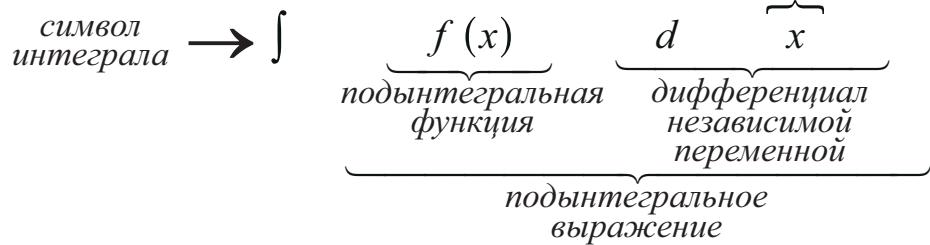
4 $\int \left(x - \frac{1}{3} \right) dx$

5 $\int \left(-\frac{1}{2}x - 3 \right) dx$

5

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СТРУКТУРА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

СВОЙСТВО

Доказательство

Дифференциал от неопределенного интеграла
равен
подынтегральному выражению

$$\begin{aligned} &\text{подынтегральное выражение} \\ d \int f(x) dx &= \\ &= f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \int f(x) dx &= \\ &= d[F(x) + C] = dF(x) + \underbrace{dC}_{0} = \\ &= dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx \end{aligned}$$

Производная от неопределенного интеграла
равна
подынтегральной функции

$$\begin{aligned} &\text{подынтегральная функция} \\ \left[\int \underbrace{f(x)}_{dx} \right]' &= \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\int f(x) dx \right]' \cdot dx &= \\ &= \boxed{d \int f(x) dx} = \\ &= f(x) dx \end{aligned}$$

Неопределенный интеграл дифференциала функции
равен
самой функции
с точностью до постоянной

$$\begin{aligned} \int d F(x) &= \\ &= F(x) + \underbrace{C}_{\text{с точностью до постоянной}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d F(x) &= \\ &= \int F'(x) dx = \int f(x) dx = \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Запишите результат преобразований	
1	$\int d \cos x =$
2	$d \int d \sqrt{x} =$
3	$\int d \ln \sin x =$
4	$d \int d \operatorname{tg} x =$
5	$\int d(x^2 - x + 1) =$

Запишите результат преобразований	
2	$\left[\int x dx \right]' =$
1	$\left[\int \cos x dx \right]' =$
2	$\int [-\operatorname{ctg} x]' dx =$
3	$\int [\ln \sin x]' dx =$
4	$\left[\int \frac{1}{x} dx \right]' =$
5	

Тест 3						
Найдите интеграл	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x + C$	$\operatorname{tg} x dx$	$\operatorname{tg} x dx + C$	$-\ln \cos x $	$-\ln \cos x + C$
$\int \operatorname{tg} x dx$						
$\left[\int \operatorname{tg} x dx \right]'$						
$\int d \operatorname{tg} x$						
$d \int \operatorname{tg} x dx$						

4	Докажите, что	если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x) dx - \int d F(x) = C$

6

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЕЕ АРГУМЕНТА

$$y(*) = f(*)$$
$$y(x) = f(x)$$
$$y(\alpha) = f(\alpha)$$
$$y(t) = f(t)$$
$$y(n) = f(n)$$
$$y(0) = f(0)$$
$$y(k) = f(k)$$

ВАЖНОЕ СВОЙСТВО ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

В таблице интегралов
обозначения
аргумента подынтегральной функции
и
переменной интегрирования
могут быть
изменены
(одновременно!)

$$\int f(*) dx = F(*) + C$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ $f(x \pm p)$

$$x' = 1 = (x \pm p)' \\ dx = d(x \pm p)$$

$$\int f(x \pm p) dx = \underbrace{\int f(x \pm p) d(x \pm p)}_{\substack{\text{применение} \\ \text{важного свойства} \\ \text{таблицы интегралов}}} = \\ = \overbrace{F(x \pm p)} + C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Тест 1		Найдите значение функции											
$y(*) = \frac{1}{1+(*^2)}$ при		$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
	$* = 2$												
	$* = \sqrt{2}$												
	$* = \frac{1}{2}$												
	$* = \frac{1}{\sqrt{2}}$												
	$* = \frac{2}{\sqrt{2}}$												

Серия 2 Заполните пропуски в задании функции

$$y(*) = \frac{2(*)}{[1+(*^2)]^2}$$

1

$$y(p) = \frac{2(p)}{[1+()^2]^2}$$

2

$$y(x+k) = \frac{2()}{[1+()^2]^2}$$

3

$$y(x-kp) = \frac{2()}{[]^2}$$

4

$$y(x+\ln p) = []^2$$

5

$$y(x-e^{p-k}) =$$

Серия 3 Найдите интеграл

1

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

2

$$\int \frac{d(s+3)}{1+(s+3)^2}$$

3

$$\int \frac{d\alpha}{\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

4

$$\int \frac{d\vartheta}{\vartheta + \sin 3\pi}$$

5

$$\int \frac{d\omega}{1+(\omega - \log_2 \sqrt{5})^2}$$

Информационная схема
«ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \\ x \in \langle a; b \rangle$$

$\forall x \in \langle a; b \rangle$
 $F(x)$ первообразная для $f(x)$,
если
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b \rangle$

$$\int f(x) dx = \underbrace{F(x) + C}_{\begin{array}{c} \text{неопределенный} \\ \text{интеграл} \\ \text{функции } f(x) \end{array}}$$

$C - \forall$

$$\left[\underbrace{F(x) + C}_{\begin{array}{c} \text{множество} \\ \text{всех первообразных} \\ \text{для } f(x) \end{array}} \right]' = f(x)$$

СТРУКТУРА
НЕОПРЕДЕЛЕННОГО
ИНТЕГРАЛА

$$\int \underbrace{f(x)}_{\begin{array}{c} \text{подынтегральная} \\ \text{функция} \end{array}} d \underbrace{x}_{\begin{array}{c} \text{переменная} \\ \text{интегрирования} \\ \text{дифференциал} \\ \text{независимой} \\ \text{переменной} \end{array}}$$

подынтегральное выражение

СТРУКТУРА ТАБЛИЦЫ
ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Производная	Первообразная
\rightarrow Функция	$+C$

$$k \quad kx + p \quad k \frac{x^2}{2} + px$$

$$\int f(x \pm p) dx = \int f(x \pm p) d(x \pm p)$$

ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАЦИЙ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$\int d F(x) = F(x) + C$$

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$$

1

Восстановите
подынтегральную функцию

$$\int dx = x^3 \sqrt[3]{x} + C$$

2

Восстановите
подынтегральную функцию

$$\int () dx = \frac{1}{4} x^4 + C$$

3 Запишите неопределенный интеграл
как множество первообразных

$$\int \left(\pi - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) dx =$$

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1 $-\int \sin x \, dx$

2 $\int (2+x) \, dx$

3 $\int \frac{dt}{1+t^2}$

4 $\int \cos 2x \, d2x$

5 $\int \operatorname{tg} \frac{x}{2} d\frac{x}{2}$

6 $\int \frac{ds^2}{1+s^2}$

7 $\int 2(x^2)' \, dx$

Вариант 2

1 $\int (-\sin x)' \, dx$

2 $\int \frac{1}{\cos^2(x+2)} \, dx$

3 $\int \frac{d\sqrt{t}}{1+t}$

4 $\int \cos(5x-\alpha) d(5x+\alpha)$

5 $\int \operatorname{tg}\left(m + \frac{\pi}{4}\right) dm$

6 $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx^2$

7 $\int d \left[\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]$

Самостоятельная работа 1

Вариант 3

1 $\int \sin^2 x \cdot \underbrace{(\sin x)}' dx$

2 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

3 $\int \frac{d(\cos^2 2x)}{\cos^4 2x}$

4 $\left[\int (x)' dx \right]'$

5 $\int \operatorname{tg} x d \sqrt{\operatorname{tg} x}$

6 $\int (\operatorname{tg} s + 3) d(\operatorname{tg} s - 3)$

7 $\int (n-1) \cdot (n+1) dn^2$