Н.А. РЕЗНИК

Начальные представления о технике дифференцирования

Визуальный конспект-практикум

ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ
ЦПО «ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Н.А. РЕЗНИК

Начальные представления о технике дифференцирования

Визуальный конспект-практикум

**Санкт-Петербург
2002**

УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Визуальный конспект-практикум ориентирован на формирование начальных представлений по разделу "Производная" курса высшей математики. Конспект разработан для студентов 1-го курса Мурманского государственного технического университета и Мурманского государственного педагогического института. В сборнике имеется более 300 задач и упражнений различного уровня сложности. Избыточность банка задач сформирована с целью помочь обучающимся вспомнить основные положения соответствующей темы "Алгебра и начала анализа", а также восстановить утраченные знания и навыки по другим разделам школьного курса математики. Большинство примеров пособия могут быть использованы в качестве дидактических материалов в 11-х классах с углубленным изучением математики.

Составление самостоятельных работ и зачета, а также ответов ко всем задачам практикума осуществлено Плотниковой С.В.

Наталия Александровна Резник,
Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум.

© Компьютерный набор, верстка и графика Н.А. Резник
Редакторы Энтина С.Б., Плотникова С.В., Неделько Н.С.

ISBN

Утверждено к печати Редакционно-издательским Советом
ЦПО "Информатизация образования" Института продуктивного обучения Российской академии образования
ЛР № 071477 от 25.07.97
Подписано к печати с оригинал-макета 1.03.02.
Тираж 200 экз.

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

1

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

СИМВОЛ ПРИРАЩЕНИЯ И ЕГО РАСШИФРОВКА

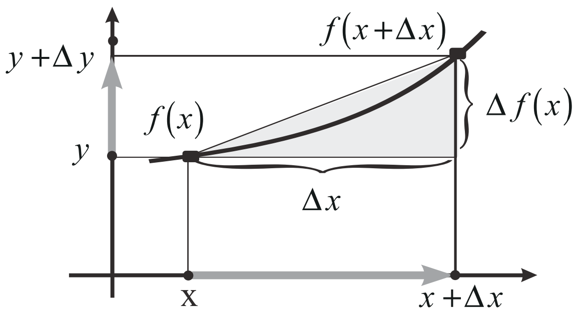
x аргумент ⇕ $f(x)$ функция

$\underbrace{\Delta}_{\text{символ приращения}}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\Delta x}_{\text{дельта икс}} = \underbrace{(x+\Delta x) - x}_{\text{приращение аргумента}}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\Delta f(x)}_{\text{дельта эф от икс}} = \underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\text{приращение функции}}$$

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ



$$y=f(x):\ x\in D(f)$$

$$\Delta x:\ x+\Delta x\in D(f)$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{\Delta x = (x+\Delta x) - x}^{\textit{приращение аргумента } x}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)}_{\textit{приращение функции } f(x)}$$

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ

Пусть $\circ$ → $+$, $-$, $\cdot$, $:$

$$\Delta\left[f(x)\circ g(x)\right] = \left[f(x+\Delta x)\circ g(x+\Delta x)\right] - \left[f(x)\circ g(x)\right]$$

Пример

$$\Delta\left[\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right] = \left[\frac{\sqrt{x+\Delta x}}{(x+\Delta x)^2}\right] - \left[\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right]$$

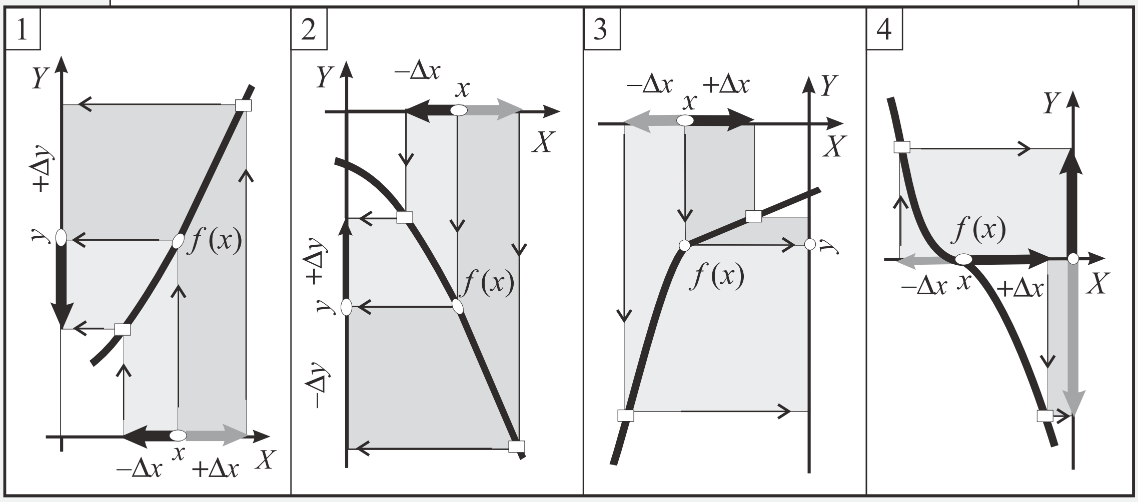
$$\Delta\left[\sin x\cdot\frac{1}{x}\right] = \left[\sin(x+\Delta x)\cdot\frac{1}{x+\Delta x}\right] - \left[\sin x\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$\circ$ → $:$, $\cdot$

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

1 Серия

Для каждого приращения аргумента $\pm\Delta x$
отметьте соответствующее приращение $\pm\Delta y$ функции $y = f(x)$



2 Докажите, что

$$\Delta\big[u(x)\cdot v(x)\big] \neq \Delta u(x)\cdot\Delta v(x) \quad \left(\begin{array}{c} \forall\ u(x),\ v(x) : x \in [a;b] \\ \Delta x : (x+\Delta x) \in [a;b] \\ \Delta u(x)\cdot\Delta v(x) \neq \mathbf{0} \end{array}\right)$$

3 Докажите, что

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \neq \Delta\frac{f(x)}{x}$$

4 Докажите, что

$$\frac{\Delta x^{\mathbf{2}}}{\Delta x} = \mathbf{2}x + \Delta x$$

5 Докажите, что

$$\frac{\Delta\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

2

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

СИМВОЛ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

$\Delta x = x - x_0$ приращение аргумента

$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ приращение функции

$\underbrace{\lim}_{\text{символ предела}}$

Если

$\boxed{\text{из } \Delta x \to 0} \Rightarrow \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to \underbrace{f'(x)}_{\text{производная функции } f(x) \text{ в } (\cdot)\, x}$

то пишут:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

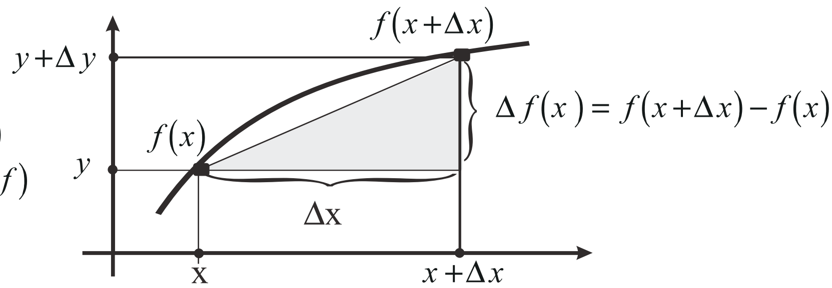
ЧТЕНИЕ ФОРМУЛЫ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

$$\overbrace{f'(x)}^{\text{Производной функции } f \text{ в } (\cdot)\, x} \overset{\text{называется}}{=} \overbrace{\lim_{\underbrace{\Delta x \to 0}_{\text{когда } \Delta x \text{ стремится к } 0}}}^{\text{предел}} \overbrace{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}^{\text{отношения приращения функции } f \text{ в } (\cdot)\, x \text{ к приращению аргумента } \Delta x}$$

ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ , УДОБНАЯ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

$f(x):\ x \in D(f)$

$\Delta x:\ x + \Delta x \in D(f)$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

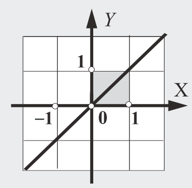
СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ОПЕРАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Операция нахождения производной называется дифференцированием

$$\underbrace{\left[f(x)\right]'}_{\textit{дифференцирование}} = \underbrace{f'(x)}_{\textit{нахождение производной}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = x$

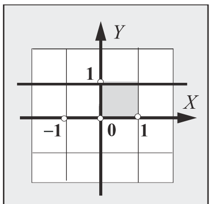


$y = x$

$$(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} =$$

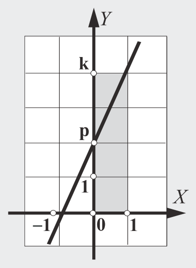
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$



$y' = 1$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = \mathbf{k}\,x + \mathbf{p}$



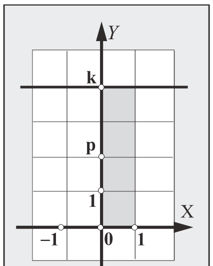
$y = \mathbf{k}\,x + \mathbf{p}$

$$(\mathbf{k}\,x + \mathbf{p})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(\mathbf{k}\,x + \mathbf{p})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\mathbf{k}(x + \Delta x) + \mathbf{p}\right] - \left[\mathbf{k}\,x + \mathbf{p}\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{k}\,x + \mathbf{k} \cdot \Delta x + \mathbf{p} - \mathbf{k}\,x - \mathbf{p}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{k} \cdot \Delta x}{\Delta x} = \mathbf{k}$$



$y' = \mathbf{k}$

1	Докажите, что	$(\mathbf{k})' = \mathbf{0}$

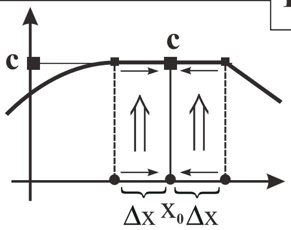
2	Докажите, что	$(\mathbf{k}\,x)' = \mathbf{k}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

3

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ПОЛЕЗНЫЕ ПРЕДЕЛЫ



$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{c} = \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{число}}$$

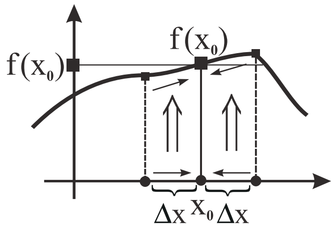
Предел числа равен числу

$$\Delta x = x - x_0 \to 0$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) \to f(x_0),$$

то пишут:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$$

если существует предел!



$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{число}}$$

Значение функции в заданной точке есть число

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Если существуют пределы,

то существуют пределы!

$$\lim_{x \to x_0} \left[\mathbf{k} \cdot f(x)\right] = \mathbf{k} \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

число выносится за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

предел суммы / разности равен сумме / разности пределов

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad \boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0}$$

предел частного равен частному пределов
при условии, что предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^n$$

предел степени равен степени предела

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

предел корня равен корню из предела

Если существуют пределы,

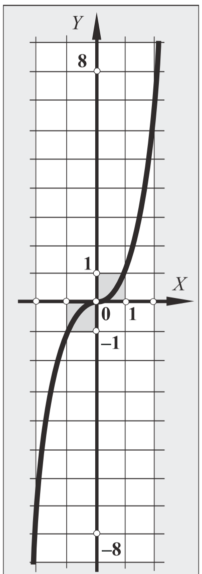
то существуют пределы!

Если существуют пределы,

то существуют пределы!

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x) = x^3$



$y = x^3$

$$\left(x^3\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

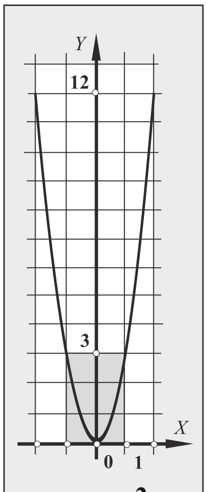
$$\boxed{= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}}_{\textit{мысленное преобразование}} =}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{3x^2 \cdot \Delta x}{\Delta x} + \frac{3x \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} \right] =$$

$$\boxed{= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left[3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \right]}_{\textit{мысленное преобразование}} =}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + \lim_{\Delta x \to 0} (3x \cdot \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 =$$

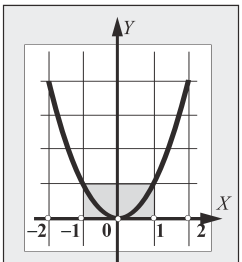
$$= 3 \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} x^2}_{\substack{x^2 = const \\ \textit{в } (\cdot)\, x}} + 3 \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} x}_{\substack{x = const \\ \textit{в } (\cdot)\, x}} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{0} + \Big(\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{0} \Big)^2 = 3x^2$$



$y' = 3x^2$

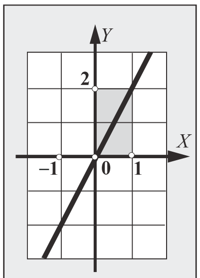
1 Докажите, что

$$\left(x^2\right)' = 2x$$



$y = x^2$

$$\left(x^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$



$y' = 2x$

4

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $f(x)=\sqrt{x}$

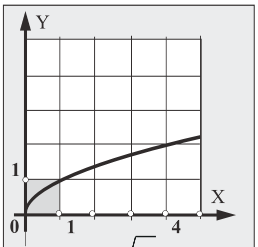
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\quad\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} =$$

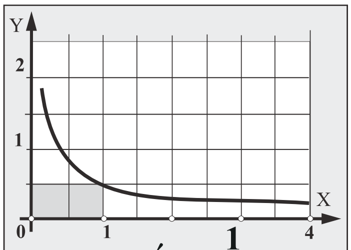
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}}_{1}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$y=\sqrt{x}$



$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

1	Докажите, что

$$\Delta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x\cdot(x+\Delta x)}$$

2	Докажите, что

$$\Delta\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-2x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2\cdot x^2}$$

3	Докажите, что

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-\Delta x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}$$

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

4 Докажите, что $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

5 Докажите, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

6 Докажите, что $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$

5

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНЫХ СТЕПЕНЕЙ И РАДИКАЛОВ

$$(x)' = \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot x^{\mathbf{1-1}}$$

$$\left(x^2\right)' = \mathbf{2}x = \mathbf{2} \cdot x^{\mathbf{2-1}}$$

$$\left(x^3\right)' = \mathbf{3}x^2 = \mathbf{3} \cdot x^{\mathbf{3-1}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = (-1) \cdot x^{-1-1}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} = (-2) \cdot x^{-2-1}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$$

. . . .

$\Downarrow$

$$\overbrace{\left(x^{\mathbf{n}}\right)' = \mathbf{n} \cdot x^{\mathbf{n-1}}}^{\textit{Общая формула}}$$

$\Downarrow$

$$\left(x^{\mathbf{n}}\right)' = \mathbf{n} \cdot x^{\mathbf{n}} \cdot \frac{1}{x}$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\left(x^{\mathbf{n}}\right)' = \mathbf{n} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot x^{\mathbf{n}}}_{\textit{формула, удобная для нахождения результата}}$$

1 Тренажер

Заполните пропуски в таблице производных степеней и радикалов, составленной по формуле, *удобной* для нахождения результата

	$f(x)$		$f'(x)$
	$x^{\mathbf{n}}$	☛	$\mathbf{n} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot x^{\mathbf{n}}$
	$\Downarrow$		$\Downarrow$
1	$\frac{1}{x^{\mathbf{n}}}$	☛	$-\mathbf{n} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^{\mathbf{n}}}$
2	$\sqrt[\mathbf{n}]{x}$	☛	$\frac{1}{\mathbf{n}} \cdot \boxed{} \cdot \sqrt[\mathbf{n}]{x}$
3	$\frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}$	☛	$-\frac{1}{\mathbf{n}} \cdot \boxed{} \cdot \frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}$
4	$\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$	☛	$\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$
5	$\frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$	☛	$-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}} \cdot \boxed{} \cdot \frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Запишите результат дифференцирования по формуле, удобной для вычислений, и упростите его

2 Тренажер

1	$\left(\sqrt{x}\right)' =$
2	$\left(\sqrt[3]{x}\right)' =$
3	$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' =$
4	$\left(\sqrt[4]{x^3}\right)' =$
5	$\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' =$

3 Тренажер

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$	1
$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$	2
$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' =$	3
$\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' =$	4
$\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\right)' =$	5

4 Докажите, что

$$\frac{2}{3}\left(x\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x}$$

5 Докажите, что

$$x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{x}$$

6 Докажите, что

$$\frac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)'-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'} = 2x$$

7 Докажите, что

$$\frac{\dfrac{\left(x^2\right)'}{2}-2\left(\sqrt{x}\right)'}{x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

6

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

НЕЗАВИСИМАЯ ПЕРЕМЕННАЯ И АРГУМЕНТ ФУНКЦИИ

Договоримся отличать:

$$f(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}) = \underbrace{\left[\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}\right]^{2n}}_{\text{функция от } x}$$

$$f\left(\overbrace{x^2}^{\text{аргумент}}\right) = \underbrace{\left[\overbrace{x^2}^{\text{аргумент}}\right]^{n}}_{\text{функция от } x^2}$$

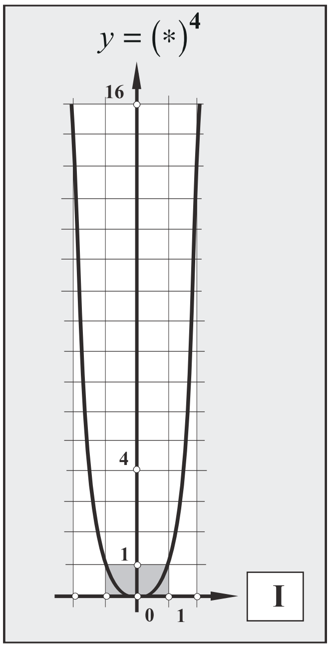
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ ПРОИЗВОДНОЙ

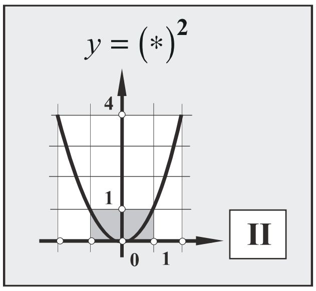
Если
дифференцирование
функции $f(x)$
ведется
по независимой переменной x,
то
вместо $[f(x)]'$ *пишут*
$f'_x(x)$ **или** $f'(x)$

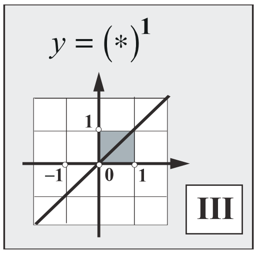
Если
дифференцирование
функции $f(*)$
ведется
по аргументу $*$,
то
вместо $[f(*)]'$ *пишут*
$f'_*(*)$ **или** $f'(*)$

Пример

Определите аргумент каждой из заданных функций







Р е ш е н и е

I $\quad y = (\underbrace{x}_{\text{аргумент}})^4$

II $\quad y = (\underbrace{x^2}_{\text{аргумент}})^2$

III $\quad y = (\underbrace{x^4}_{\text{аргумент}})^1$

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Пример

$x^4 = (x)^4 \Leftarrow \boxed{x = *}$

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x}} = \underbrace{\left(*^4\right)'_* = 4(*)^3}_{\text{мысленно}} = 4x^3$$

$x^4 = \left(x^2\right)^2 \Leftarrow \boxed{x^2 = *}$

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x^2}} = \underbrace{\left[(*)^2\right]'_* = 2*}_{\text{мысленно}} = 2x^2$$

$x^4 = \left(x^4\right)^1 \Leftarrow \boxed{x^4 = *}$

$$\left(x^4\right)'_{\boxed{x^4}} = \underbrace{\left[\,*\,\right]'_* = 1}_{\text{мысленно}} = 1$$

1 Серия. Заполните пропуски в примерах нахождениях производных по заданным аргументам

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'_{\frac{1}{x}} = \left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^4\right]'_{\frac{1}{x}} = \left(*^4\right)'_* = 4\cdot *^3 = 4\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$

2. $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\left(\boxed{}\right)^4\right]'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left(*^4\right)'_* = 4\cdot *^3 = 4\cdot\left(\quad\right)^3 =$

3. $\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)'_{\sqrt[4]{x}} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{}}}\right]'_{\sqrt[4]{x}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{*}}\right)'_* =$

4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)'_{\sqrt[8]{x}} = \left[\dfrac{1}{\left(\sqrt[8]{x}\right)^{\boxed{}}}\right]'_{\sqrt[8]{x}} = \boxed{}$

2 Докажите, что $(x)'_{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)'_x}$

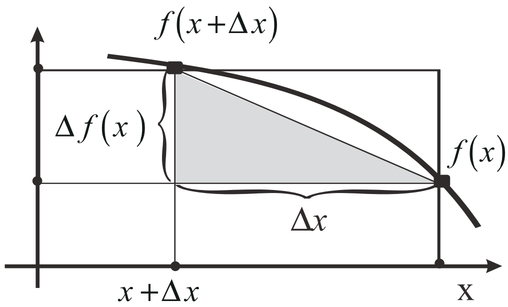
3 Докажите, что $\dfrac{\left(x^2\right)'_x}{(x)'_{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}$

Информационная схема
«СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ»

Полезные пределы

$$\Delta x = x - x_0 \to \mathbf{0} \;\Downarrow\; f(x) \to f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{c} = \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{число}}} \qquad \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{число}}}$$



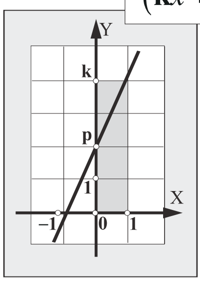
$$\overbrace{\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)}^{\textit{приращение функции } f(x)}$$

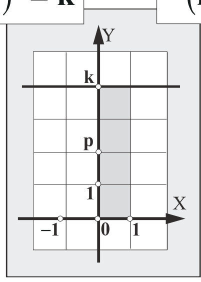
$$\Downarrow$$

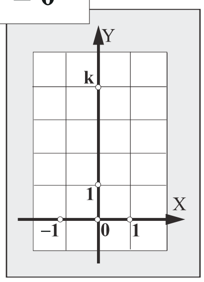
$$\underbrace{\Delta x = (x + \Delta x) - x}_{\textit{приращение аргумента } x}$$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}$$

$$\boxed{(\mathbf{k}x + \mathbf{p})' = \mathbf{k}} \qquad \boxed{(\mathbf{k})' = \mathbf{0}}$$







Общая формула производной степени

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left(x^n\right)' = n \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \cdot x^n}_{\textit{формула, удобная для практики}}$$

Если дифференцирование $f(x)$ ведется по переменной x, то

$$\underbrace{\left[f(x)\right]'}_{\textit{пишем}} = \underbrace{f'_x(x)}_{\textit{дифференцируем}}$$

Если дифференцирование $f(*)$ ведется по аргументу $*$, то

$$\underbrace{f'(*)}_{\textit{пишем}} = \underbrace{f'_*(*)}_{\textit{дифференцируем}}$$

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Самостоятельная работа 1

1. Докажите,что $\Delta\left(\frac{1}{x}+x\right)=\frac{\Delta x\left[x(x+\Delta x)-1\right]}{x(x+\Delta x)}$

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\Delta x^2}=-\frac{1}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

2. Докажите,что $\frac{\left(x^{k}\right)'}{\left(x^{-k}\right)'}=-x^{2k}$

3. Найдите: $\frac{\left(\sqrt[5]{x}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)'}$

4. Найдите: $\frac{\left(x^{-5}\right)'}{\left(x^{5}\right)'}$

5. Для функции $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$ найдите $f'_*(*)$ при различных аргументах.

аргумент $*$	$f(*)$	$f'_*(*)$
$*=x$		
$*=\sqrt[5]{x}$		
$*=x^2$		
$*=x^4$		
$*=\sqrt[5]{x^4}$		
$*=\frac{1}{x}$		
$*=\frac{1}{x^2}$		
$*=\frac{1}{x^4}$		

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ОТВЕТЫ

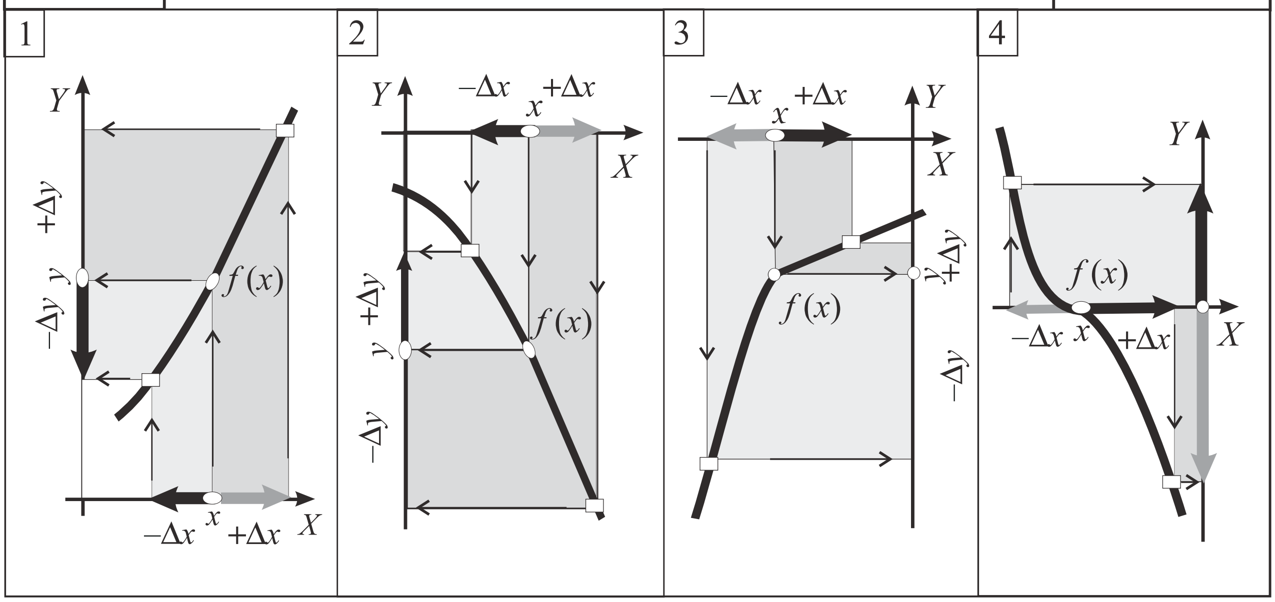
СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Тренажер

	С. 12, № 1		С. 13, № 2		С. 13, № 3
1	$-\mathbf{n}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^{\mathbf{n}}}$	1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}$	1	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$
2	$\frac{1}{\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x}$	2	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{x}$	2	$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
3	$-\frac{1}{\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}$	3	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}$	3	$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
4	$\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$	4	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}$	4	$-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$
5	$-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\cdot\boxed{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$	5	$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt[4]{x^5}$	5	$-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$

Серия

С. 4, № 1



ОТВЕТЫ

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Серия С. 15, № 1

1
$$= \left[\left(\frac{1}{x}\right)^4 \right]'_{\frac{1}{x}} = \cdots = \frac{4}{x^3}$$

2
$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \right]'_{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \cdots = \frac{4}{\sqrt{x^3}}$$

3
$$= \left[\frac{1}{\sqrt{\sqrt[4]{x}}} \right]'_{\sqrt[4]{x}} = \cdots = \frac{-1}{2\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{\sqrt[4]{x}}}$$

4
$$= \left[\frac{1}{\left(\sqrt[8]{x}\right)^2} \right]'_{\sqrt[8]{x}} = \cdots = \frac{-2}{\sqrt[8]{x^3}}$$

Задачи на доказательство

С. 5, № 2
$$\Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right] = \left[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)\right]$$
$$\Delta u(x)\cdot \Delta v(x) = \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right]\cdot\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]$$

С. 5, № 3
$$\Delta\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x+\Delta x)}{x+\Delta x} - \frac{f(x)}{x}$$

С. 5, № 4
$$= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

С. 5, № 5
$$= \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x \quad \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

С. 7, № 1
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathbf{k}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}}{\Delta x} =$$

С. 7, № 2
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{k}(x+\Delta x) - \mathbf{k}x}{\Delta x} =$$

ОТВЕТЫ

СИМВОЛ И ФОРМУЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Задачи на доказательство

С. 9, № 1

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

С. 10, № 1

$$= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} =$$

С. 10, № 2

$$= \frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} =$$

С. 10, № 3

$$= \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}\right)} =$$

С. 11, № 4

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x} =$$

С. 11, № 5

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x - x - \Delta x}{x \cdot (x + \Delta x)}}{\Delta x} =$$

С. 11, № 6

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2 \cdot x^2}}{\Delta x} =$$

С. 13, № 4

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3}\right)' =$$

С. 13, № 6

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \cdots \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \cdots$$

С. 13, № 7

$$2\left(\sqrt{x}\right)' = \cdots \qquad \frac{\left(x^2\right)'}{2} = \cdots$$

С. 15, № 2

$$(x)'_{\sqrt{x}} = \left[\left(\sqrt{x}\right)^2\right]'_{\sqrt{x}}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

1

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ВЫНЕСЕНИЕ ЧИСЛА ЗА ЗНАК ПРОИЗВОДНОЙ

$$\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]' = \mathbf{c}\cdot f'(x)$$

[*Если существует* $f'(x)$]

Доказательство

$$\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left[\mathbf{c}\cdot f(x)\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{c}\cdot f(x+\Delta x)-\mathbf{c}\cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \mathbf{c}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \mathbf{c}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \mathbf{c}\cdot f'(x)$$

Пример

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]' + \left[\frac{x^3}{3}\right]' + \ldots + \left[\frac{x^9}{9}\right]' + \left[\frac{x^{10}}{10}\right]' =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2\right)' + \frac{1}{3}\left(x^3\right)' + \ldots + \frac{1}{9}\left(x^9\right)' + \frac{1}{10}\left(x^{10}\right)'}_{\text{мысленно}} =$$

$$= x + x^2 + \ldots + x^8 + x^9$$

Пример

$$\left(\frac{6}{x\sqrt[3]{x^2}}\right)' = 6\cdot\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \boxed{\textit{определим } \mathbf{n}\textbf{:}\ \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}} = -\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{5\sqrt[3]{x}}{3x^3}$$

1 Тест. Определите, при каких значениях x производная функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$ равна

производная функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$ равна	*нет решения*	-4	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$f'(x)=-1$												
$f'(x)=0$												
$f'(x)=2$												
$f'(x)=\frac{1}{4}$												
$f'(x)=16$												

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

2 Тренажер

Найдите производную, выполнив все преобразования

1	$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)' =$
2	$\left(\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$
3	$\left(\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' =$
4	$\left(\dfrac{x}{2\sqrt[3]{x}}\right)' =$

3 Докажите, что **4**

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)' + \left(\frac{1}{nx^n}\right)' = \frac{1}{x}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)$$

$$\left(n\sqrt[n]{x}\right)' - \left(\frac{n}{\sqrt[n]{x}}\right)' = \frac{1}{x}\cdot\left[\sqrt[n]{x} + \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right]$$

5 Тест

Найдите производную	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{\sqrt{x}}{x}$	$\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$-\frac{\sqrt{x}}{x}$	$-\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\left(-\frac{1}{x}\right)'$								
$\left(\frac{1}{2x^2}\right)'$								
$\left(2\sqrt{x}\right)'$								
$\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'$								

2

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРОИЗВОДНАЯ СУММЫ

Если существуют производные u' и v' на заданном промежутке, то существует производная $(u+v)'$ на этом же промежутке:

$$\underbrace{\left[u(x)+v(x)\right]'}_{\text{Производная суммы разности}} \underbrace{=}_{\text{равна}} \underbrace{u'(x) + v'(x)}_{\text{сумме разности производных}}$$

Доказательство

$\boxed{1}$ $]\ f(x)=u(x)\pm v(x) \Rightarrow \Delta f(x) = \Delta\left[u(x) \pm v(x)\right] =$

$$=\left[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)\right]-\left[u(x)\pm v(x)\right]=$$

$$=\underbrace{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}_{=\ \Delta u(x)} \pm \underbrace{\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}_{\Delta v(x)} =$$

$\boxed{2}$ *при* $x \to \mathbf{0}$: $(u\pm v)' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{=\ u'(x)} \pm \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} =$$

$$\boxed{(u\pm v)' = u' \pm v'}$$

Пример

$$f(x)= 3x^2 - 1 + x$$

$$\Downarrow$$

$$\left[f(x)\right]' = \left(3x^2 - 1 + x\right)' =$$

$$= \boxed{\underbrace{\left(3x^2\right)' - (1)' + (x)'}_{\text{мысленно}}} =$$

$$= \boxed{\underbrace{3\cdot\left(x^2\right)' - 0 + 1}_{\text{мысленно}}} = 6x+1$$

Пример

$$f(x)= \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[f(x)\right]' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \boxed{\underbrace{\left(\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}_{\text{мысленно}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot x} = \frac{1}{2x}\cdot\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Пример Решите уравнение $\left(x^3 - x^2 + 5x\right)' = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + 1\right)'$

Решение

$$3x^2 - 2x + 5 \quad = \quad 2x^2 + 3x - 5$$
$$x^2 - 5x + 10 = 0$$

Так как $D = 25 - 40 < 0$, *то решений нет*

1 Серия

Решите уравнение

1. $\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 6x\right)' = 0$
2. $x^2 - 1 = (2x)'$
3. $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8x\right)' = 3x$
4. $\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x\right)' = \left(1 - x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)'$

2 Тест

Вычислите значение производной функции

$f(x) = 2 + x - x^2$ в заданной точке	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f'\left(-\frac{1}{2}\right)$													
$f'(-1)$													
$f'(0)$													
$f'(1)$													
$f'\left(\frac{1}{2}\right)$													

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

3

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ЗАЖАТОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

$$\exists\, g(x) < \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{зажатая}\\ \text{переменная}\\ \text{при}\\ x\to a\\ \text{с любой стороны}}} < G(x):\quad \begin{matrix}\lim\limits_{x\to a} g(x) = M\\ \lim\limits_{x\to a} G(x) = M\end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) \quad < \quad f(x) \quad < G(x)$$

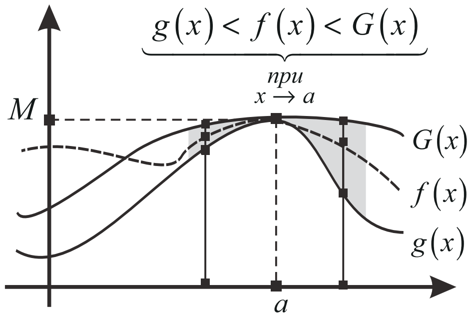
$$\downarrow$$

$$M$$

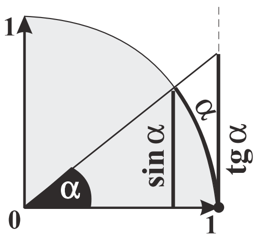
при $x \to a$ с любой стороны

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = M$$



ФОРМУЛА ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА



$$\exists\ \alpha \to 0 \ (\alpha > 0) \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\alpha \quad < \quad \alpha \quad < \quad \operatorname{tg}\alpha \quad \Big|\, : \sin\alpha > 0$$

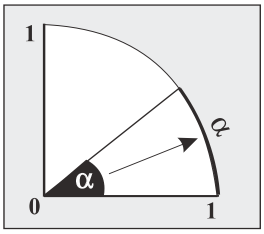
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \quad < \quad \frac{\alpha}{\sin\alpha} \quad < \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$1 \quad < \quad \frac{\alpha}{\sin\alpha} \quad < \quad \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$



$$\boxed{\alpha \to 0}$$

$$\cos\alpha \quad < \quad \overbrace{\boxed{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}} \quad < \quad 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ (\alpha>0)}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1}$$

$$\alpha \to 0 \ (\alpha < 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ (\alpha<0)}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)}_{\text{мысленно}}=\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1}=\frac{1}{2}$$

1	Докажите, что

$$\Delta\sin x=\sin x\cdot\cos\Delta x+\cos x\cdot\sin\Delta x-\sin x$$

2	Докажите, что

$$\frac{\Delta\cos x}{\Delta x}=\cos x\cdot\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}-\sin x\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

3	Докажите, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)}{(\Delta x)^2}=1$$

4

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРОИЗВОДНАЯ СИНУСА

$]\, f(x) = \sin x \;\; \forall\, x \in R$

$$\boxed{(\sin x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{\sin x \;\cdot \cos\Delta x} + \cos x \cdot \sin\Delta x - \boxed{\sin x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x \cdot (\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\sin x \cdot \frac{2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \right] =$$

$$= -\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \sin x}_{\sin x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2}}_{0} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \cos x}_{\cos x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}_{1} =$$

$$= \boxed{\cos x}$$

1	Докажите, что	$(\cos x)' = -\sin x \quad \forall\, x \in R$

2	Докажите, что	$(2\sin x)' \cdot (\cos x)' = -\sin 2x$

3	Докажите, что	$2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)' = \sin x$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

$\left[(\sin x)'\right]' = -\sin x$	4	Докажите, что	5	$\left[(\cos x)'\right]' = -\cos x$

Пример Найдите значение производной функции $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x$ $\quad (\cdot)\ x = \dfrac{\pi}{3}$

Вместо слов
«значение производной функции $f(x)$ в заданной точке $x = \mathbf{a}$»
можно писать
$$\left[f(x)\right]'_{|x=\mathbf{a}} = f'(\mathbf{a})$$

Решение

$$\left(2\sqrt{3}\sin x\right)'_{|x=\pi/3} = \boxed{\underbrace{2\sqrt{3}(\sin x)'_{|x=\pi/3}}_{\textit{мысленно}}} =$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos x_{|x=\pi/3}\right) = \boxed{\underbrace{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)}_{\textit{мысленно}}} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

6 Тест Вычислите значение производной функции

в заданной точке	-2	$-\sqrt{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	2
$\left(2\sin x\right)'_{\lvert x=\pi/4}$										
$\left(-\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}\right)'_{\lvert x=3\pi/4}$										
$\dfrac{\left(-\cos x\right)'_{\lvert x=5\pi/4}}{2\sqrt{2}}$										
$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)'_{\lvert x=-\pi/4}$										

5

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРОИЗВОДНАЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

$$\left.\right] \; f(x) = u(x)\cdot v(x) = u \cdot v$$

1

$$\Delta f(x) = \Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right]$$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) =$$

$$=\left[u(x)+\Delta u(x)\right]\cdot\left[v(x)+\Delta v(x)\right] - u(x)\cdot v(x) =$$

$$= \Delta u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v(x) + \Delta u(x)\cdot\Delta v(x) =$$

$$= \Delta u \cdot v + u\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v \quad -$$

2

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}\cdot v + u\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}} + \underbrace{\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v}_{0}}_{0} =$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$= u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$\left[u\cdot v\right]' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

[Если существуют $u'(x)$ и $v'(x)$]

ПРОИЗВОДНАЯ ЧАСТНОГО

$$\left.\right] \; h = \frac{u}{v} \Rightarrow u = v\cdot h$$

$$\Downarrow$$

$$u' = (v\cdot h)' = v\cdot h' + v'\cdot h$$

$$\Downarrow$$

$$h' = \frac{u' - v'\cdot h}{v} = \frac{u' - v'\cdot\frac{u}{v}}{v} = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

[Если существуют $u'(x)$ и $v'(x)\neq\mathbf{0}$]

Пример

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\sin x\cdot x^2\right)' = \underbrace{\boxed{(\sin x)'\cdot x^2 + \sin x\cdot\left(x^2\right)'}}_{\text{мысленно}} = x^2\cos x + 2x\sin x$$

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \boxed{\frac{(\sin x)'\cdot x^2 - \sin x\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}} = \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Пример

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \underbrace{\frac{\left(x^2\right)' \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \underbrace{\frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}}_{\text{мысленно}} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

1 Серия

Найдите производную по теореме о производной произведения

1. $f(x) = x^3 \dfrac{\cos x}{2} \Rightarrow f'(x) =$
2. $f(x) = \dfrac{3\sin x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) =$
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) =$
4. $f(x) = (2x+1)\cdot\cos x \Rightarrow f'(x) =$

2 Серия

Найдите производную по теореме о производной частного

1. $y = \dfrac{x}{\cos x} \Rightarrow y' =$
2. $y = \dfrac{3\sin x}{x} \Rightarrow y' =$
3. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x-1} \Rightarrow y' =$
4. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2x}} \Rightarrow y' =$

6

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПОЛЕЗНОЕ СЛЕДСТВИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ЧАСТНОГО

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \boxed{\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}}$$

$$= \frac{(1)'\cdot f(x) - 1\cdot[f(x)]'}{[f(x)]^2} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Пример

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \boxed{\underbrace{\frac{(x^2)'\cdot\cos x - x^2\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}}_{\textit{мысленно}}} =$$

$$= \frac{2x\cdot\cos x + x^2\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \boxed{\underbrace{\frac{2x}{\cos x} + \frac{x^2\sin x}{\cos^2 x}}_{\textit{мысленно}}} = \frac{x}{\cos x}(2 + x\cdot\mathrm{tg}\,x)$$

Посмотрите и сравните

Пример

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \boxed{\underbrace{(x^2)'\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}_{\textit{мысленно}}} =$$

$$= 2x\cdot\frac{1}{\cos x} + x^2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{x}{\cos x}(2 + x\cdot\mathrm{tg}\,x)$$

Пример

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-x^2}\right)' = -\frac{\left(\sqrt{x}-x^2\right)'}{\left(\sqrt{x}-x^2\right)^2} = \boxed{\underbrace{-\frac{\left(\sqrt{x}\right)' - \left(x^2\right)'}{\left(\sqrt{x}-x^2\right)^2}}_{\textit{мысленно}}} =$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{x}}{2x} - 2x}{\left(\sqrt{x}-x^2\right)^2} = \frac{4x^2-\sqrt{x}}{2x\left(\sqrt{x}-x^2\right)^2}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

1 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{1-\cos^2 x}$$

2 Докажите, что

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}$$

3 Тренажер

1	$\left(\frac{1}{3x-7}\right)' =$
2	$\left(\frac{1}{x^2-3x+1}\right)' =$
3	$\left(\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sin x}\right)' =$
4	$\left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)' =$

4 Тест

Определите функцию по результату ее дифференцирования	$y=x^2\cdot g(x)$	$y=\left[g(x)\right]^2$	$y=\frac{g(x)}{x^2}$	$y=\frac{x^2}{g(x)}$	$y=\frac{1}{g(x)}$
$y'=2x\cdot g(x)+x^2g'(x)$					
$y'=2g(x)\cdot g'(x)$					
$y'=\frac{x\cdot g'(x)-2g(x)}{x^3}$					
$y'=\frac{2x}{g(x)}-\frac{x^2g'(x)}{g^2(x)}$					
$y'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$					

7

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ПРОИЗВОДНАЯ ТАНГЕНСА

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$= \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

или

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\right)' =$$

$$\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)' = u'\cdot\frac{1}{v} + u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$= (\sin x)'\cdot\frac{1}{\cos x} + \sin x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \cos x\cdot\frac{1}{\cos x} + \sin x\cdot\left(-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\right) = 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

1 Докажите, что $(\underbrace{\mathrm{ctg}\,x}_{\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}})' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

2 Докажите, что $(\underbrace{\mathrm{ctg}\,x}_{\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}})' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

3	Докажите, что	$(\mathrm{tg}\,x - x)' = \mathrm{tg}^2 x$

Тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \qquad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

4	Докажите, что	$\left(-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)' = 1 + \mathrm{ctg}^2 x$

5	Докажите, что	$\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{ctg}\,x}\right)' = 2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

6	Докажите, что	$\left(\dfrac{x}{\mathrm{ctg}\,x}\right)' = x\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\,x + x$

9	Докажите, что

$$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x}\right)' = \cos 2x$$

7	Докажите, что	$\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)' = \mathrm{tg}\,x \cdot \left(\cos x + \dfrac{1}{\cos x}\right)$

8	Докажите, что	$(\mathrm{tg}\,x)' - (\mathrm{ctg}\,x)' = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$

8

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ВВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\underbrace{f\Bigg(\underbrace{\underbrace{\mathbf{k}}_{\text{множитель}} \cdot \overbrace{x}^{\text{независимая переменная}} + \mathbf{p}}_{\text{линейный аргумент}}\Bigg)}_{\text{функция}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = f(z) \\ z = \mathbf{k}x + \mathbf{p} \end{array}\right\} \Downarrow \quad y = f(\ z\ ) \quad \downarrow \quad \boxed{\mathbf{k}x + \mathbf{p}} \quad y = f(\mathbf{k}x + \mathbf{p})$$

Пример По заданным функциям $f(x) = \mathbf{2}x + \mathbf{1}$ и $g(x) = x^2$ составьте функции $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$

Анализ

Проанализируем структуры функций:

$f(\boxed{x}) = \mathbf{2}\boxed{x} + \mathbf{1}$

$g(\boxed{x}) = \boxed{x}^2$

Решение

$$f\left[g(x)\right] = \underbrace{f\left[x^{\mathbf{2}}\right]}_{\text{мысленно}} = \mathbf{2}\cdot\boxed{x^{\mathbf{2}}} + \mathbf{1}$$

$$g\left[f(x)\right] = \underbrace{g\left[\mathbf{2}x + \mathbf{1}\right]}_{\text{мысленно}} = \left(\boxed{\mathbf{2}x + \mathbf{1}}\right)^{\mathbf{2}}$$

Пример $f(x)$, $\quad f(x + \mathbf{1}) = x^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}x + \mathbf{2}$

Анализ

$$f\quad (x + \mathbf{1}) \;=\; x^{\mathbf{2}} \;-\mathbf{3}\cdot\; x \;+\mathbf{2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f\left[(x + \mathbf{1}) - \mathbf{1}\right] = (x - \mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\cdot(x - \mathbf{1}) + \mathbf{2}$$

Решение

$$f(x) = (x - \mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\cdot(x - \mathbf{1}) + \mathbf{2} =$$
$$= x^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}x + \mathbf{1} - \mathbf{3}x + \mathbf{3} + \mathbf{2} =$$
$$= x^{\mathbf{2}} - \mathbf{5}x + \mathbf{6}$$

1 Тест Для функции $f(x) = x^2$ определите

	$\mathbf{4}x^{\mathbf{2}}$	$\mathbf{2} + x^{\mathbf{2}}$	$\mathbf{2}x^{\mathbf{2}}$	$\mathbf{2}x^{\mathbf{2}} + \mathbf{1}$	$\mathbf{2} - x^{\mathbf{2}}$	$(x - \mathbf{2})^{\mathbf{2}}$	$\mathbf{2} - \mathbf{4}x + x^{\mathbf{2}}$
$\mathbf{2}f(x)$							
$f(\mathbf{2}x)$							
$f(x) + \mathbf{2}$							
$\mathbf{2} - f(x)$							
$f(\mathbf{2} - x) - \mathbf{2}$							

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

2 Тренажер

Определите для функции	независимую переменную	линейный аргумент	множитель функции	множитель независимой переменной
$y = 2\sin(3x+4)$				
$y = \dfrac{\cos(3-4z)}{2}$				
$y = 4\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\varphi}{3}\right)+2$				
$y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\alpha-3}{4}\right)$				

Определяя соответствующее ОДЗ, составьте функцию

$y=\sqrt{*}-1$ с аргументом $y=\sqrt{*}-1$

3 Тренажер | **4** Тренажер

№	**3**	аргумент	**4**	№
1		$x-4$		1
2		$1-x$		2
3		$4x$		3
4		$\dfrac{x}{4}$		4
5		$1-4x$		5

5 Тренажер

Для функции $y=f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ составьте

1	$f(x+1)=$
2	$f(2x)=$
3	$f\left(\dfrac{x}{4}\right)=$
4	$f(4x-3)=$

6 Докажите, что

$f(x)=x-\sqrt{x}$
$x \ge 0,$

$f(x+2)+f(1-x)=3-\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}$
$-2 \le x \le 1$

9

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

МОДЕЛЬ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$$] \; y = f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

При $x \to \Delta x$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) \to \Delta(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

$$\Downarrow$$

$$f(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) \to \Delta f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

заменим $\mathbf{k}x+\mathbf{p}$ на $*$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(*)}{\Delta x} = (*)'_x$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta(*)\to 0}\frac{\Delta f(*)}{\Delta(*)} = f'_*(*)$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$$] \exists \; y' = f'_*(*) = f'_{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}(\mathbf{k}x+\mathbf{p}),$$

где $(*)' = (\mathbf{k}x+\mathbf{p})' = \mathbf{k}$

Найдем $\left[f(*)\right]' = f'_x(*)$ **:**

$$f'_x(*) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(*)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta f(*)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta(*)}{\Delta(*)}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta f(*)}{\Delta(*)}\cdot\frac{\Delta(*)}{\Delta x}\right] =$$

$$\begin{matrix}\Delta x\to 0\\ \Downarrow \\ \Delta(*)\to 0\end{matrix} \quad = \lim_{\Delta(*)\to 0}\frac{\Delta f(*)}{\Delta(*)} \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(*)}{\Delta x} =$$

$$= f'_*(*) \cdot (*)'_x =$$

$$= f'_*(*) \cdot \mathbf{k}$$

Если *дифференцирование функции* $f(*)$ $[$*при* $* \neq x]$ *ведется по независимой переменной x*, **то** *вместо* $\left[f(*)\right]'$ *пишут* $f'_x(*)$

Так как $f'_x(*) = f'_x(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) = \left[f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]'$ *и* $\exists \; f'_{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$,

$$f'_*(*) = f'_{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) = f'(\mathbf{k}x+\mathbf{p})$$

то

$$\left[f(\boxed{\mathbf{k}}x+\mathbf{p})\right]' = \boxed{\mathbf{k}} \cdot f'(\boxed{\mathbf{k}}x+\mathbf{p})$$

Пример

$$\left[\mathbf{tg} \; (\mathbf{5}x+\mathbf{3})\right]' =$$

$$= \mathbf{5} \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2 \; \underbrace{(\mathbf{5}x+\mathbf{3})}_{\text{при сохранении аргумента}}}}_{\text{сразу результат}}$$

$$\left[\; f \; (\mathbf{k}x+\mathbf{p})\right]' =$$

$$= \mathbf{k} \cdot \underbrace{f' \; \underbrace{(\mathbf{k}x+\mathbf{p})}_{\text{при заданном аргументе}}}_{\text{производная функции}}$$

Пример

$$\left[\mathbf{sin} \; (\mathbf{3}x-\mathbf{5})\right]' =$$

$$= \mathbf{3} \cdot \underbrace{\mathbf{cos} \; \underbrace{(\mathbf{3}x-\mathbf{5})}_{\text{при сохранении аргумента}}}_{\text{сразу результат}}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

1 Тест Определите

производную	$3\cos 3x$	$\cos 3x$	$3\cos x$	$\frac{1}{3}\cos x$	$\cos\frac{x}{3}$	$3\cos\frac{x}{3}$	$\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$
$(\sin 3x)'$							
$\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)'$							
$\left(3\sin\frac{x}{3}\right)'$							
$\left(\sin\frac{x}{3}\right)'$							

2 Тренажер

Определите переменную, по которой ведется дифференцирование

1	$\sin'(\mathbf{k}x) = (\cdots)'_{\square}$
2	$[\sin(\mathbf{k}x)]' = (\cdots)'_{\square}$
3	$[\sin(\mathbf{k}x+\mathbf{p})]' = (\cdots)'_{\square}$
4	$\sin'(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) = (\cdots)'_{\square}$

3 Тренажер

Найдите производную по x

1	$\left[(2x+5)^3\right]' =$
2	$[\cos(7-2x)]' =$
3	$\left(\sqrt{3x+2}\right)' =$
4	$[\operatorname{ctg}(1-x)]' =$

4 Докажите, что $\dfrac{\left[2\sqrt{\mathbf{k}x}\right]'}{\mathbf{k}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{k}x}}$

5 Докажите, что $\dfrac{[f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})]'}{f'(\mathbf{k}x+\mathbf{p})} = \mathbf{k}$

Информационная схема

«ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ»

$$(\mathbf{c})' = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{k}x + \mathbf{p})' = \mathbf{k}$$

$$\left[\,\mathbf{c}\cdot f(x)\right]' = \mathbf{c}\cdot f'(x)$$

$$\left[\,u \pm v\,\right]' = u' \pm v'$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$\underbrace{f(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}})}_{\text{функция от } x}$$

Вместо $[f(x)]'$ *пишут* $f'_x(x)$ *или* $f'(x)$

Вместо $[f(*)]'$ *пишут* $f'_*(*)$ *или* $f'(*)$

$$\underbrace{f(\overbrace{*}^{\text{аргумент}})}_{\text{функция от } *}$$

$$\underbrace{f\Big(\underbrace{\underbrace{\mathbf{k}}_{\text{множитель}}\cdot\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}}+\mathbf{p}}_{\text{линейный аргумент}}\Big)}_{\text{функция}}$$

$$\left[f(\boxed{\mathbf{k}}\,x+\mathbf{p})\right]' = \boxed{\mathbf{k}}\cdot f'(\boxed{\mathbf{k}}\,x+\mathbf{p})$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\left(-\frac{x^{-2}}{2\sqrt{2}}\right)' =$
2. $\left[\left(x^2+2\right)^3\right]' =$
3. $2\left[\cos^2\frac{x}{2}\right]' =$
4. $\left[\sqrt[5]{x^2}\cdot\frac{3\sin x}{2}\right]' =$
5. $\left[\frac{1}{x-2x^2-6}\right]' =$
6. $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$
   $f(x)=$
7. $\left[(\mathrm{m}x-\mathrm{p})^{\mathrm{n}}\right]' =$
8. $\left[(\sin x)'\right]^2+\left[(\cos x)'\right]^2=1$

Вариант 2

1. $\left(\frac{1}{4\sqrt[8]{x^2}}\right)' =$
2. $\left[\frac{4}{5}x^5-2\left(\frac{x^2}{2}\right)'+1\right]' =$
3. $\left[\sin\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\cdot 2\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\right]' =$
4. $\left[\frac{x^3+3x}{\cos x}-2\right]' =$
5. $\left[\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\right]' =$
6. $f'(x)=2\left(x-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$
   $f(x)=$
7. $\left[\frac{\sqrt{2x+5}}{(2x+5)^2}\right]' =$
8. $\sin 2x=-2\cdot(\sin x)'(\cos x)'$

Вариант 3

1. $\left(\frac{2\sqrt[5]{x^3}}{5x}\right)' =$
2. $\left[\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\cdot\left(\frac{(2x)^2}{16}+\frac{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)\right]' =$
3. $\left[(\cos x+\sin x)^2\right]'_{2x} =$
4. $\left[\frac{x}{6\sqrt[3]{x}}+\frac{\sin x}{2x}-3x\cos x\right]' =$
5. $\left[\frac{1}{\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}\right]'_{3x} =$
6. $f'(x)=\cos x\cdot\mathrm{tg}x+\frac{\mathrm{tg}x}{\cos x}$
   $f(x)=$
7. $\left[\cos(5-x)\cdot\sin(3x+2)\right]' =$
8. $(\mathrm{tg}x)'=\mathrm{tg}^2x+1$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ОТВЕТЫ

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Тренажер

С. 23, № 2		С. 33, № 3		С. 37, № 2				
1	$\frac{\sqrt{x}}{x^2}$	1	$-\frac{3}{(3x-7)^2}$	1	x	$3x+4$	2	3
2	$\frac{-2\sqrt[3]{x^2}}{x^2}$	2	$-\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+1\right)^2}$	2	z	$3-4z$	$\frac{1}{2}$	4
3	$-\frac{3\sqrt[4]{x}}{x^2}$	3	$\frac{-1}{\sqrt{x}\sin x}\left(\mathrm{ctg}\,x+\frac{1}{2x}\right)$	3	φ	$\frac{\varphi}{3}$	4	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}$	4	$\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}$	4	α	$\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$

Тренажер

С. 37, № 3		С. 37, № 4		С. 37, № 5		С. 39, № 2		С. 39, № 3	
1	$y=\sqrt{x-4}-1$, $x\ge 4$	1	$y=\sqrt{x-5}$, $x\ge 5$	1	$y=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$	1	$\mathbf{k}x$	1	$6(2x+5)^2$
2	$y=\sqrt{1-x}-1$, $x\le 1$	2	$y=\sqrt{-x}$, $x\le 0$	2	$y=\frac{2x+1}{\sqrt{2x}}$	2	x	2	$2\sin(7-2x)$
3	$y=\sqrt{4x}-1$, $x\ge 0$	3	$y=\sqrt{4x-1}$, $x\ge\frac{1}{4}$	3	$y=\frac{x+4}{2\sqrt{x}}$	3	x	3	$\frac{3\sqrt{3x+2}}{2(3x+2)}$
4	$y=\frac{\sqrt{x}}{2}-1$, $x\ge 0$	4	$y=\frac{\sqrt{x-4}}{2}$, $x\ge 4$	4	$y=\frac{4x-2}{\sqrt{4x-3}}$	4	$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	4	$\frac{1}{\sin^2(1-x)}$
5	$y=\sqrt{1-4x}-1$, $x\le\frac{1}{4}$	5	$y=2\sqrt{-x}$, $x\le 0$						

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

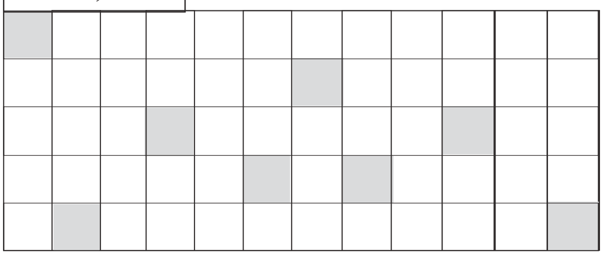
ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ **ОТВЕТЫ**

Серия

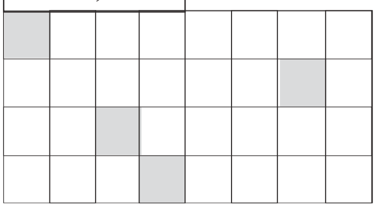
С. 25, № 1	С. 31, № 1	С. 31, № 2
1 $x = -1; -6$	1 $\frac{x^2}{2}(3\cos x - x\sin x)$	1 $\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$
2 $x = \pm\sqrt{3}$	2 $\frac{3}{2\sqrt{x}}\left(\cos x - \frac{\sin x}{2x}\right)$	2 $\frac{3(x\cos x - \sin x)}{x^2}$
3 $x = 2$	3 $\frac{1}{\cos^2 x}$	3 $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$
4 *решений нет*	4 $2(\cos x - x\sin x) - \sin x$	4 $\frac{3\sqrt{2x}}{4}$

Тест

С. 22, № 1



С. 23, № 5

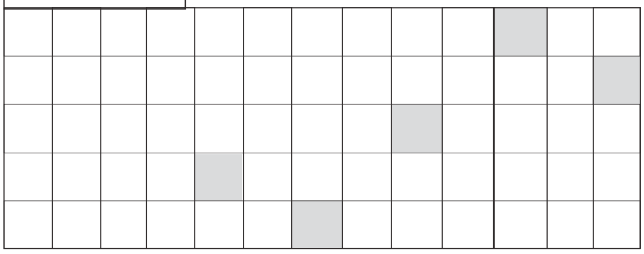


ОТВЕТЫ

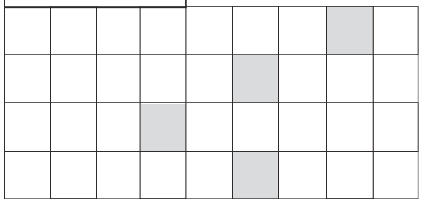
ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Тест

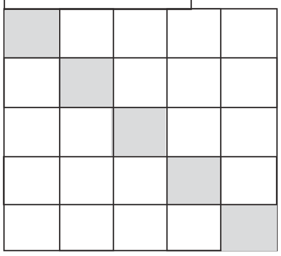
С. 25, № 2



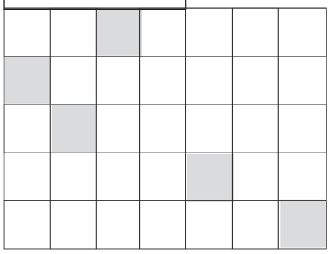
С. 29, № 6



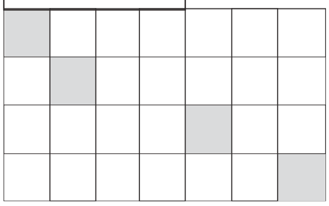
С. 33, № 4



С. 36, № 1



С. 39, № 1



Задачи на доказательство

С. 23, № 3

$$= \frac{1}{n}\left(x^{n}\right)' + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{x^{n}}\right)' =$$

С. 23, № 4

$$= n\cdot\left(\sqrt[n]{x}\right)' - n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' =$$

С. 27, № 1

$$= \sin\left(x+\Delta x\right) - \sin x =$$

С. 27. № 2

$$= \frac{\cos\left(x+\Delta x\right) - \cos x}{\Delta x} =$$

С. 27, № 3

$$\cos * - 1 = -2\sin^{2}\frac{*}{2}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

ОТВЕТЫ

Задачи на доказательство

С. 28, № 1

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} =$$

С. 28, № 2

$$= 2 \cdot (\sin x)' \cdot (\cos x)' =$$

С. 28, № 3

$$2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

С. 29, № 4

$$= [\cos x]' =$$

С. 29, № 5

$$= [-\sin x]' =$$

С. 33, № 1

$$= -\underbrace{\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}}_{\text{мысленно}} =$$

С. 33, № 2

$$= -\underbrace{\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}}_{\text{мысленно}} =$$

С. 34, № 1

$$\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} - u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

С. 34, № 2

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

С. 35, № 3

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 =$$

С. 35, № 4

$$= (-\mathrm{ctg}\, x)' =$$

С. 35, № 5

$$= (\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, x)' =$$

С. 35, № 6

$$= (x \cdot \mathrm{tg}\, x)' =$$

С. 35, № 7

$$= (\sin x \cdot \mathrm{tg}\, x)' =$$

ОТВЕТЫ

ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ

Задачи на доказательство

С. 35, № 8

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\cos x \cdot \sin x)^2} =$$

С. 35, № 9

$$= \left(\frac{1}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x}} \right)' =$$

С. 37, № 6

$$f(x+2) = x + 2 - \sqrt{x+2} \qquad x \geq -2$$
$$f(1-x) = 1 - x - \sqrt{1-x} \qquad x \leq 1$$

С. 39, № 4

$$= \left[2\sqrt{k\,x}\right]' = 2\sqrt{k}\left(\sqrt{x}\right)' =$$

С. 39, № 5

$$\left[f(k\,x+p)\right]' = \left[f(k\,x+p)\right]'_x$$
$$f'(k\,x+p) = f'_{kx+p}(k\,x+p)$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

1 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

КОНСТРУИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$\underbrace{f\left[\ g(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}})\ \right]}_{\text{функция}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=g(x)\\ z=f(y)\end{array}\right\}\Downarrow$$

$$z=f[\ y\ ]$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y=g(x)}$$

$$z=f[\ g(x)\ ]$$

$$\underbrace{f\left[\ \underbrace{g(\overbrace{x}^{\text{независимая переменная}})}_{\text{аргумент}}\ \right]}_{\text{функция}}$$

ЗАВИСИМОСТЬ СТРУКТУРЫ ФУНКЦИИ ОТ ЕЕ АРГУМЕНТА

$$f\left[g(\underbrace{x}_{\textit{аргумент}})\right]$$

$$\underbrace{f\left[g(\ *\ )\right]}_{\textit{структура функции}}$$

Структура строения функции, представленной аналитически (формулой), зрительно определяется «изъятием» ее аргумента

$$f\left[\underbrace{g(x)}_{\textit{аргумент}}\right]$$

$$\underbrace{f\left[\ *\ \right]}_{\textit{структура функции}}$$

Пример

Определите структуру функции $z=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ при различных стуктурах аргумента

$z=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$z=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$z=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\underbrace{*=x}_{\text{аргумент}}$	$\underbrace{*=\cos x}_{\text{аргумент}}$	$\underbrace{*=\cos^2 x}_{\text{аргумент}}$
$z=\dfrac{1}{\cos^2 *}$	$z=\dfrac{1}{(*)^2}$	$z=\dfrac{1}{*}$

1 Тест. Определите запись без скобок

выражения	$\dfrac{\sin\alpha}{2}$	$\sin\dfrac{\alpha}{2}$	$\sin^2\alpha$	$\sin\alpha^2$	$2\sin\alpha$	$\sin 2\alpha$
$[\sin\alpha]^2$						
$\sin(2\alpha)$						
$\sin(\alpha^2)$						
$(\sin\alpha)/2$						
$\sin(\alpha/2)$						

2 Тренажер. По заданной функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ составьте

1	$f(2x)=$
2	$f(\sqrt{x})=$
3	$f(x^2)=$
4	$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

3 Тренажер

$f(x)=2x-1 \quad g(x)=\sin x$

составьте

1	$f\left[f(x)\right]=$
2	$g\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=$
3	$g\left[f(x)\right]=$
4	$\dfrac{1}{f\left[g(x)\right]}=$

4 Тренажер

Для $f(x)=x^2$ *и* $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

составьте

1	$f\left[f(x)\right]=$
2	$g\left[g(x)\right]=$
3	$f\left[g(x)\right]=$
4	$g\left[f(x)\right]=$

5 Тест

По заданным функциям $f(x)=x^2$ и $g(x)=x-1$

составьте функцию y	$(x^2-1)^2$	x^4-1	x^2-1	$x-2$	x^2+x-1	$(x-1)^2$	$(x-1)^4$
$y=f\left[g(x)\right]$							
$y=g\left[f(x^2)\right]$							
$y=f\left[g(x^2)\right]$							
$y=g\left[g(x)\right]$							
$y=f\left[g^2(x)\right]$							

6 Докажите, что

$f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}, \qquad f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$

7 Докажите, что

$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}, \qquad f(x)=x^2-2$

2

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ВЫВОД ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕНИ

$$\left[f^2(x)\right]' = \left[f(x)\cdot f(x)\right]' = f'(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x) = \mathbf{2}\,\frac{f^2(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$\left[f^3(x)\right]' = \left[f^2(x)\cdot f(x)\right]' = \underbrace{\mathbf{2}\,f(x)f'(x)}_{\left[f^2(x)\right]'}\cdot f(x) + f^2(x)\cdot f'(x) = \mathbf{3}\,\frac{f^3(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$\left[f^4(x)\right]' = \left[f^3(x)\cdot f(x)\right]' = \underbrace{\mathbf{3}\,f^2(x)f'(x)}_{\left[f^3(x)\right]'}\cdot f(x) + f^3(x)\cdot f'(x) = \mathbf{4}\,\frac{f^4(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$$

…………………………………………………………………………………………

$$\left[f^n(x)\right]' = \left[f^{n-1}(x)\cdot f(x)\right]' = \cdots + \cdots = n\,\frac{f^n(x)}{f(x)}\cdot f'(x)$$

1 Тренажер

Заполните пропуски в таблице производных степенных сложных функций

	$f(x)$	$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$ $f'(x)$
	$f^{\mathbf{n}}(x)$	$\mathbf{n}\cdot f^{\mathbf{n}}(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \mathbf{n}\cdot f^{\mathbf{n-1}}(x)\cdot f'(x)$
1	$\dfrac{\mathbf{1}}{f^{\mathbf{n}}(x)}$	$-\mathbf{n}\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{f^{\mathbf{n}}(x)}\cdot\dfrac{\square}{f(x)} = -\dfrac{\mathbf{n}\cdot f'(x)}{f^{\mathbf{n+1}}(x)}$
2	$\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\cdot\square\cdot\dfrac{f'(x)}{\square} = \dfrac{\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}\cdot f'(x)}{\mathbf{n}\cdot f(x)}$
3	$\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}}$	$-\square\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}}\cdot\square = -\dfrac{\square}{\mathbf{n}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{f(x)}\cdot f(x)}$
4	$\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}$	$\square\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}\cdot\square = \dfrac{\square\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}\cdot\square}{\square}$
5	$\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}}$	$\square\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{f^{\mathbf{k}}(x)}}\cdot\square = \square$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Составьте функцию с аргументом $x/4$, и найдите ее производную

Пример $y=\sqrt{x}-1$

Решение

$$y=\sqrt{\frac{x}{4}}-1=\frac{\sqrt{x}}{2}-1$$

$$y'=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{2}=\frac{\sqrt{x}}{4x}$$

Пример $y=\sqrt{x-1}$

Решение

$$y=\sqrt{\frac{x}{4}-1}=\sqrt{\frac{x-4}{4}}=\frac{\sqrt{x-4}}{2}$$

$$y'=\left(\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x-4}\right)'}{2}=\frac{\sqrt{x-4}}{4(x-4)}$$

2 Тренажер

Для заданной функции f(x) найдите $\left[f^2(x)\right]'$

1	$f(x)=\cos x$	
2	$f(x)=\sin^2 x$	
3	$f(x)=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$	
4	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$	

3 Серия Найдите производную

1. $\left[\dfrac{\sin^2 x}{2}\right]'=$

2. $\left[\dfrac{4}{\cos^2 x}\right]'=$

3. $\left[-\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2(2x)}\right]'=$

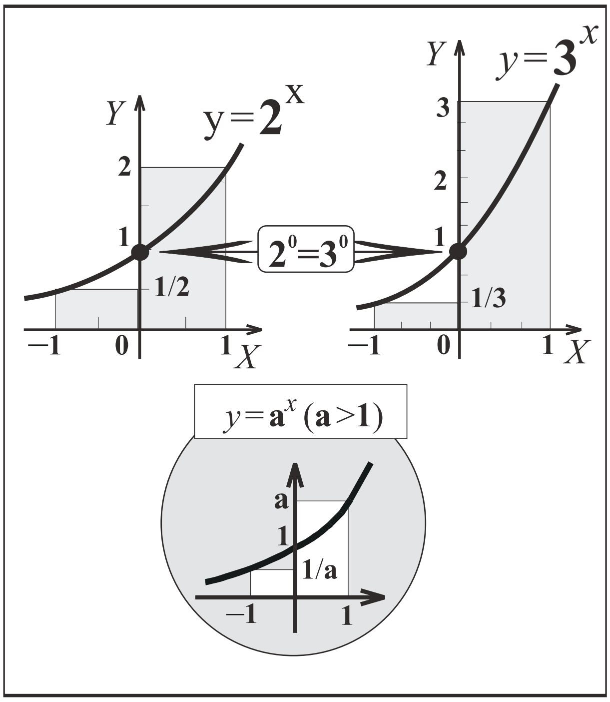
4. $\left[\sqrt{4\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)}\right]'=$

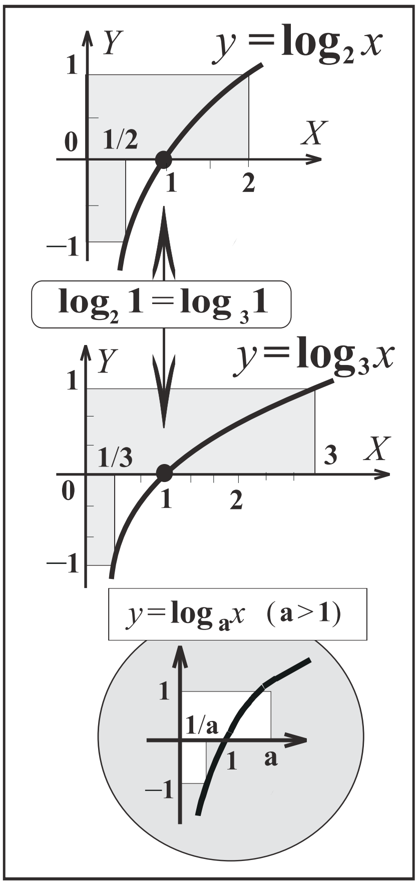
Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

3

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭКСПОНЕНТОЙ И ЛОГАРИФМОМ





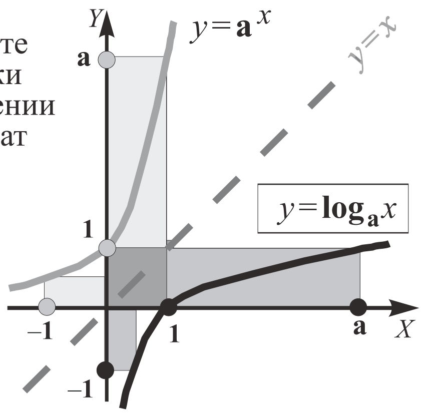
1 Тренажер

$y = a^x$ ⟷ $x = a^y$

$\log_a x = y$

Заполните пропуски в обозначении координат точек

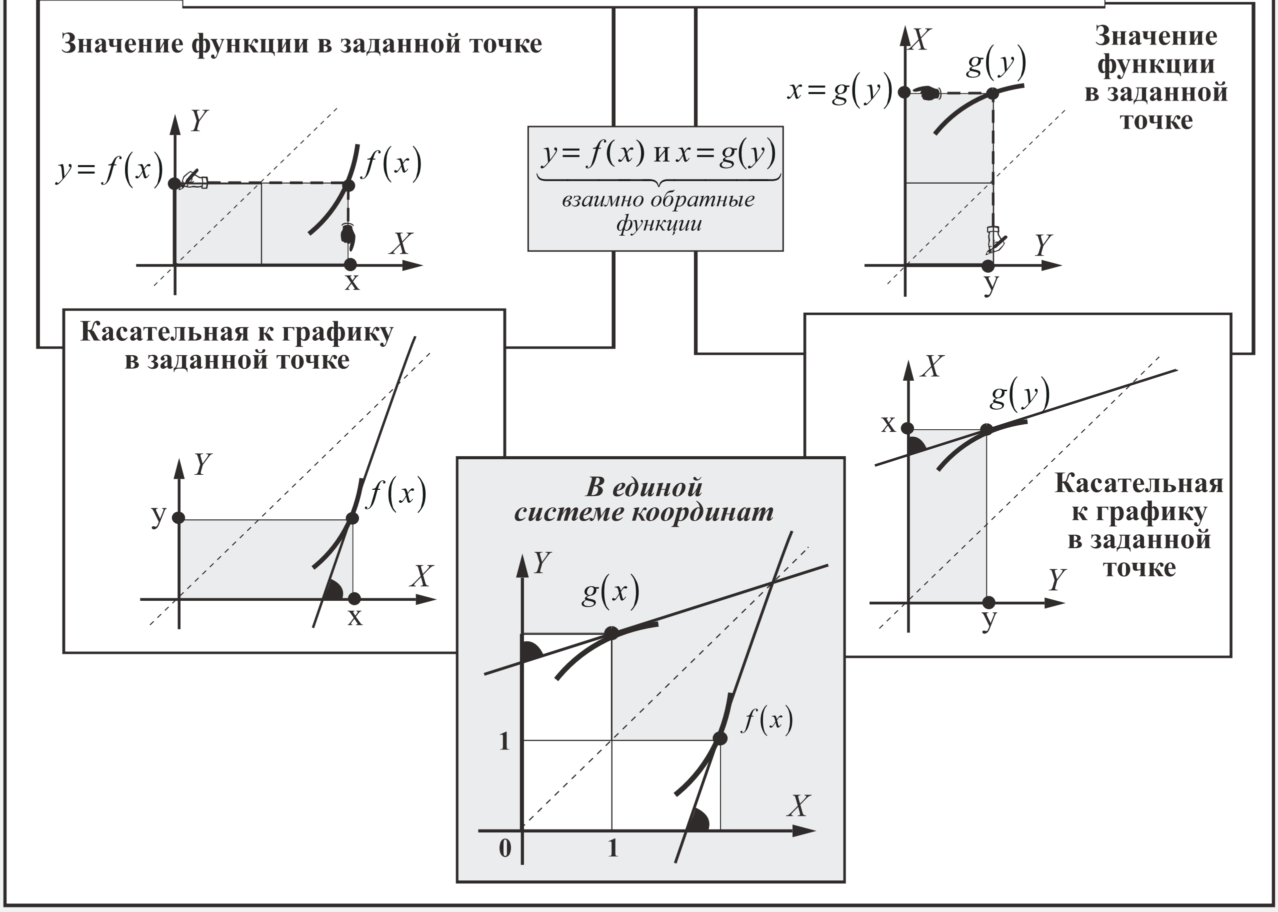
$(0;1)$	⟷	$(\square;0)$
$(\square;a)$	⟷	$(\square;1)$
$\left(-1;\frac{1}{a}\right)$	⟷	$(\square;\square)$



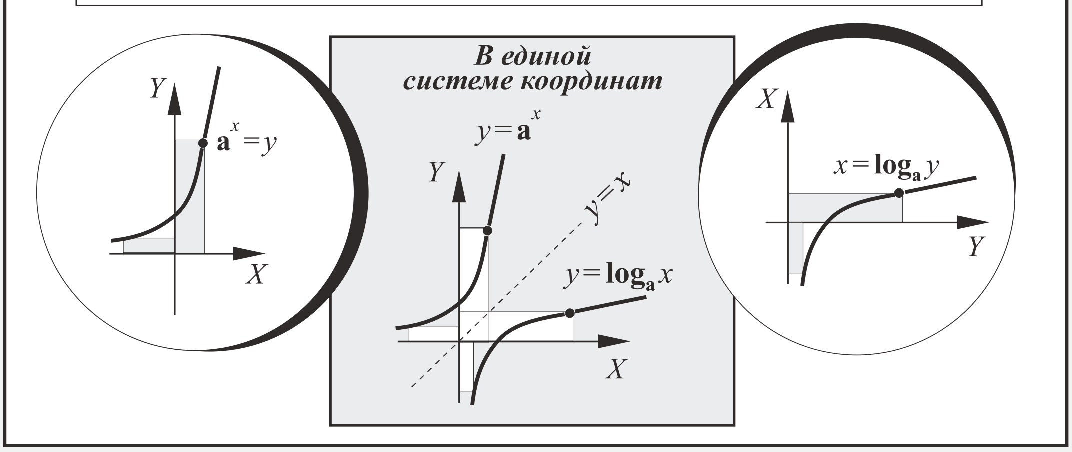
Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О СВЯЗЯХ МЕЖДУ ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ



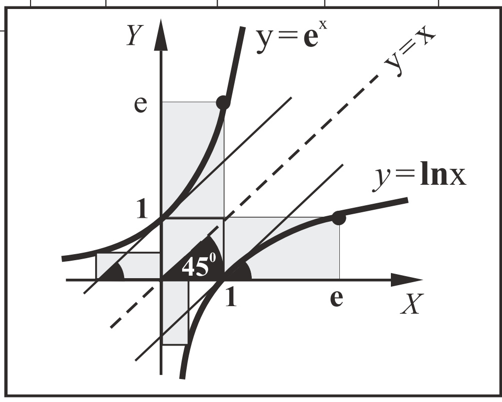
ОБРАТИМОСТЬ ЭКСПОНЕНТЫ И ЛОГАРИФМА



4 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

НАТУРАЛЬНЫЕ ЭКСПОНЕНТА И ЛОГАРИФМ

Число	x	1	2	10	100	1000	10000	100000	$\cdots$
Калькулятор	$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	2,71825	$\cdots$



$\Downarrow$

Число **e**

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to\infty}{\to} \mathbf{e}:\ 2<\mathbf{e}<3$$

ПРОИЗВОДНАЯ ЭКСПОНЕНТЫ С НАТУРАЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

$$\left(\mathbf{e}^x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathbf{e}^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^{x+\Delta x}-\mathbf{e}^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^x\cdot\mathbf{e}^{\Delta x}-\mathbf{e}^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^x\cdot\left(\mathbf{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} =$$

$$0 \leftarrow \Delta x$$
$$\mathbf{e}^{\Delta x}-\mathbf{e}^0 \to 0$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{e}^{\Delta x}-1 \approx \Delta x$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\mathbf{e}^x}_{\mathbf{e}^x}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = \mathbf{e}^x$$

$$\boxed{\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x}$$

1 Тест Найдите производную	$2\mathbf{e}\cdot x^{2\mathbf{e}-1}$	$x^{2\mathbf{e}}$	$\mathbf{e}^{x-2}$	$\mathbf{e}^x$	$2\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^{2x}$	$2\mathbf{e}^{2x}$
$\left(\mathbf{e}^{2x}\right)'$							
$\left(\mathbf{e}^{x-2}\right)'$							
$\left(2\mathbf{e}^{x}\right)'$							
$\left(x^{2\mathbf{e}}\right)'$							

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ПРОИЗВОДНАЯ ЭКСПОНЕНТЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

$$\left(\mathbf{a}^x\right)'_x = \left(\mathbf{e}^{\ln \mathbf{a}^x}\right)'_x = \left(\mathbf{e}^{\ln \mathbf{a}\cdot x}\right)'_x =$$

$x \in R$
$\mathbf{a} > 0$
$\mathbf{a} \neq 1$

$$\boxed{\left[f(\mathbf{k}x)\right]'_x = \mathbf{k} \cdot f'_{\mathbf{k}x}(\mathbf{k}x)}$$

$$= \ln \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{e}^{\ln \mathbf{a}\cdot x}\right)'_{\ln \mathbf{a}\, x} = \ln \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{x \ln \mathbf{a}} = \ln \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^x$$

$$\boxed{\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x \cdot \ln \mathbf{a}}$$

Пример

$$\left.\right] \; y = 5^{(3x+2)} \;\Rightarrow\; y' = \underbrace{3 \cdot \left[5^{(3x+2)}\right]'_{3x+2}}_{\textit{мысленно}}$$

$$= \;3 \cdot 5^{(3x+2)} \cdot \ln 5 \;= 3 \cdot \ln 5 \cdot 5^{(3x+2)}$$

2 Тренажер

	Найдите производную
1	$\left(3^x\right)' =$
2	$\left(5^x \cdot x^5\right)' =$
3	$\left(\dfrac{7^{7x}}{7}\right)' =$
4	$\left(2^{5-7x}\right)' =$
5	$\left(\dfrac{1}{5\mathbf{e}^{5x}}\right)' =$

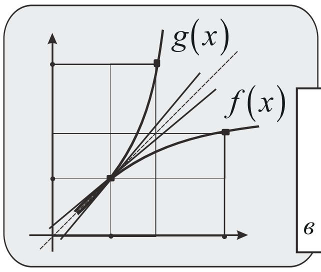
3 Тренажер

	Найдите производную
1	$\left(\mathbf{e}^x + 2^{\mathbf{e}}\right)' =$
2	$\left(\mathbf{e}^3 \cdot 3^x\right)' =$
3	$\left(\dfrac{4^x}{\mathbf{e}^x}\right)' =$
4	$\left(\dfrac{2^{2x} \cdot 2^{3x} \cdot 2^{4x}}{2^x}\right)' =$
5	$\left(\dfrac{1}{4^x} - \dfrac{1}{x^4}\right)' =$

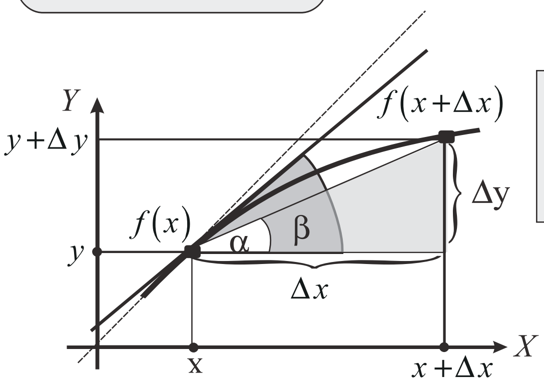
Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

5 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

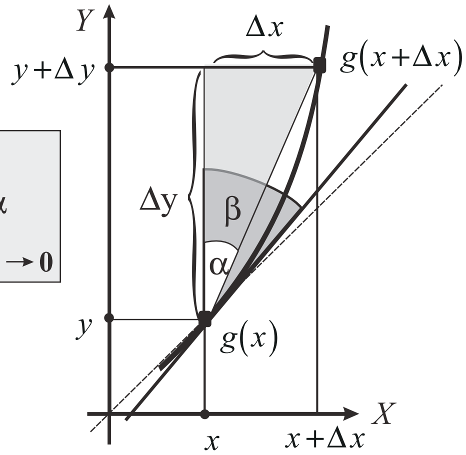
СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ



$$\underbrace{y=f(x) \qquad y=g(x)}_{\text{взаимно обратные функции, заданные в единой системе координат}}$$



$$\beta \underset{\Downarrow}{\rightarrow} \alpha$$
$$\mathbf{tg}\,\beta \xrightarrow[\text{при}]{} \mathbf{tg}\,\alpha$$
$$\Delta x \to \mathbf{0} \qquad \Delta y \to \mathbf{0}$$



$$\mathbf{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{tg}\alpha = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}_{y'_x}$$

$$\boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}}$$

$$\mathbf{tg}\beta = \lim_{\Delta y \to 0} \mathbf{tg}\alpha = \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}_{x'_y}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМА

$x \in R$
$\mathbf{a} > \mathbf{0}$
$\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$

$$x = \mathbf{a}^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_{\mathbf{a}} x$$

$$\Downarrow \qquad y'_x = \frac{1}{x'_y} \qquad \Downarrow$$

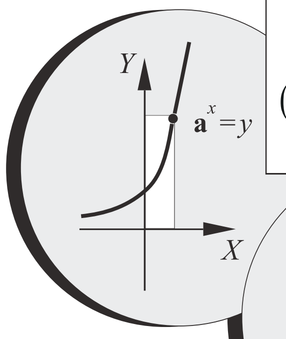
$$x'_y = \mathbf{a}^y \ln \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad y'_x = \frac{1}{\mathbf{a}^y \ln \mathbf{a}}$$

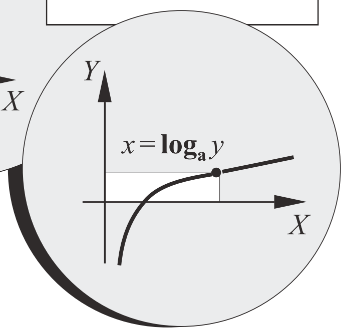
$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\log_{\mathbf{a}} x)'_x = (\log_{\mathbf{a}} x)' = \frac{1}{x \ln \mathbf{a}}}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$(\mathbf{a}^x)' = \mathbf{a}^x \cdot \ln \mathbf{a}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\log_{\mathbf{a}} x)' = \frac{1}{x \cdot \ln \mathbf{a}}$$





ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пример] $y = \log_5(3x+2)$

$$y' = \underbrace{3 \cdot \left[\log_5(3x+2)\right]'_{3x+2}}_{\text{мысленно}}$$

$$= \frac{1}{(3x+2)\cdot \ln 5} \cdot 3 =$$

$$= \frac{3}{\ln 5 \cdot (3x+2)}$$

1	Докажите, что	$\left(a^x\right)' \cdot \left(\log_a x\right)' = \dfrac{a^x}{x}$

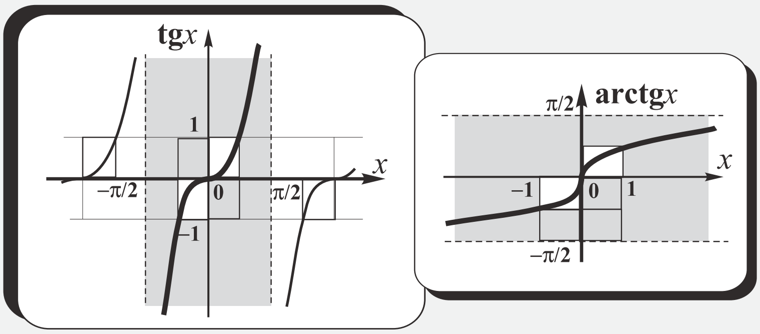
2 Тренажер	Найдите производную
1	$\left(5 \cdot \log_5 x\right)' =$
2	$\left(\ln 4 - \ln x\right)' =$
3	$\left(\dfrac{1}{3\ln^3 x}\right)' =$
4	$\left(\dfrac{\log_2 x}{2^x}\right)' =$

3	Докажите, что	$\left(a^x \cdot \log_a x\right)' = a^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x \cdot \ln a}\right)$

4 Тест Найдите производную	$7e^{7x}$	e^{7x}	$7e$	7	$7x^6$	$\dfrac{7e}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{x}{7e}$
$\left[e^{7x}\right]'$								
$\left[\ln(7ex)\right]'$								
$\left(7e\ln 7x\right)'$								
$\left[e^{7\ln x}\right]'$								
$\left[7\ln\left(e^x\right)\right]'$								

6

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ



ПРОИЗВОДНАЯ АРКТАНГЕНСА

$$x = \mathbf{tg}\, y,\quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \mathbf{arctg}\, x,\quad -\infty < x < +\infty$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_y' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \mathbf{tg}^2 y = 1 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y_x' = \frac{1}{1 + \mathbf{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\mathbf{arctg}\, x\right)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

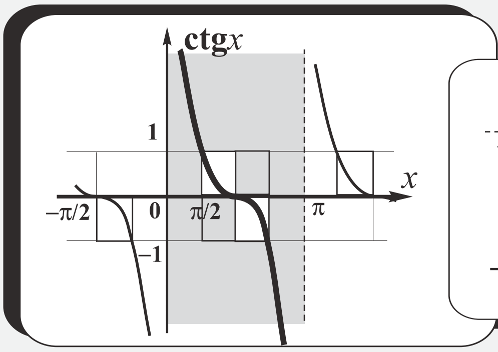
Пример

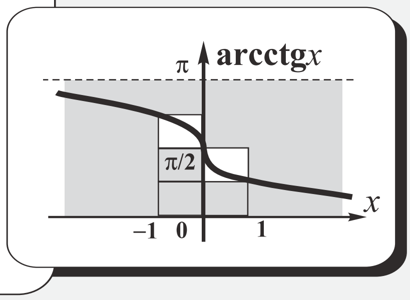
$$\left[\mathbf{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)\right]' = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\left[\mathbf{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)\right]'_{\left(\frac{x}{3}\right)}}_{\text{мысленно}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{3}{9 + x^2}$$

1 Докажите, что

$$\left[\frac{\mathbf{arctg}\left(\mathbf{k}x\right)}{\mathbf{k}}\right]' - \left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{arctg}\left(\frac{x}{\mathbf{k}}\right)\right]' = \frac{x^2\left(1 - \mathbf{k}^4\right)}{\left(1 + \mathbf{k}^2 x^2\right)\left(\mathbf{k}^2 + x^2\right)}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ





2	Докажите, что

$$\begin{cases} x = \mathbf{ctg}\, y \\ \mathbf{0} < y < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \mathbf{arcctg}\, x \\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_y' = \qquad \Leftrightarrow \qquad y_x' =$$

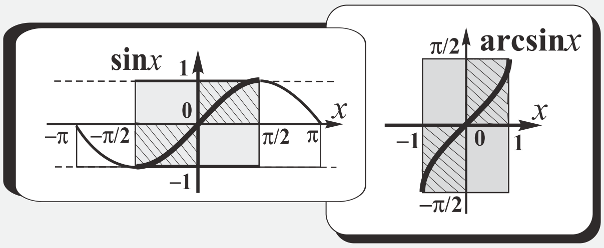
$$\Downarrow$$

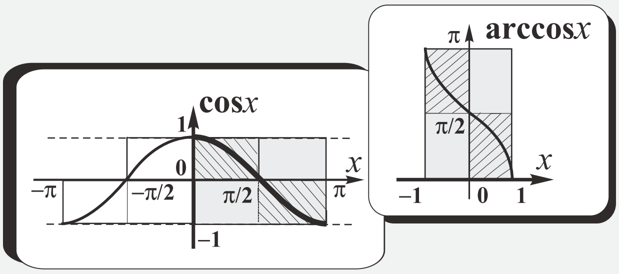
$$\boxed{(\mathbf{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

3 Тест Найдите производную	$\dfrac{-2}{x^2+4x+5}$	$\dfrac{2}{1+4x^2}$	$\dfrac{1}{2(1+x^2)}$	$\dfrac{1}{1+2x^2}$	$\dfrac{-4}{4+x^2}$	$\dfrac{-4}{4x^2+4x+5}$
$[2\,\mathrm{arcctg}(x+2)]'$						
$[\mathrm{arctg}\, 2x]'$						
$\left[2\,\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{2}\right]'$						
$\left[\dfrac{\mathrm{arctg}\, x+2}{2}\right]'$						
$\left[\mathrm{arcctg}\dfrac{1+2x}{2}\right]'$						

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

7 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ





ПРОИЗВОДНАЯ АРКСИНУСА

$$x = \sin y \quad \Leftrightarrow \quad y = \arcsin x$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \qquad -1 < x < +1$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x'_y = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

1 Докажите, что

$$x = \cos y \quad \Leftrightarrow \quad y = \arccos x$$

$$0 < y < \pi \qquad -1 < x < +1$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x'_y = \qquad \Leftrightarrow \qquad y'_x =$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Пример

$$\left[\arcsin(3x-2)\right]' = \underbrace{= 3\cdot\left[\arcsin(3x-2)\right]'_{3x-2}}_{\text{мысленно}} = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{12x-9x^2-3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x-3x^2-1}}$$

2 Докажите, что

$$\left[\frac{(\arcsin x)'}{(\arccos x)'}\right]' = 0$$

3 Докажите, что

$$\left[(\arcsin x)'\cdot(\arccos x)'\right]' = -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

4 Докажите, что

$$\frac{(\arcsin x)'}{(\operatorname{arctg} x)'} - \frac{(\arccos x)'}{(\operatorname{arcctg} x)'} = 0$$

5 Докажите, что

$$(\arcsin x \cdot \arccos x)' = \frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

6 Докажите, что

$$\left(\frac{\arccos x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{1-x^2}\cdot\left[\arccos x - \arcsin x + \frac{x\cdot\arccos x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

7 Тест

Определите функцию, производная которой равна

	$\left(\sqrt{\arcsin x}\right)'$	$\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)'$	$(\arcsin x)'$	$(2\arcsin x)'$	$(\arcsin 2x)'$	$(\arcsin^2 x)'$
$\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$						
$\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$						
$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$						
$\frac{\sqrt{\arcsin x}}{2\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$						
$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$						

8

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

$$\exists\, f'(x) \quad \exists\left[f'(x)\right]' \Rightarrow \underbrace{\left\{\underbrace{\left[f(x)\right]'}_{\text{первая производная}}\right\}'}_{\text{производная от первой производной}} = \underbrace{\left[f(x)\right]'' = f''(x)}_{\text{вторая производная}}$$

Пример

$$(\mathbf{tg}x)'' = \left[\frac{1}{\cos^2 x}\right]' = \underbrace{-\frac{2}{\cos^3 x}\cdot(-\sin x)}_{\text{мысленно}} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

1 Тест

Найдите 2-ю производную	−4	−2	−1	0	1	2	4
$\left(2x^2-x+1\right)''$							
$\left(x^2-2x+1\right)''$							
$\left(x-2x^2+1\right)''$							
$\left(x-x^2+2\right)''$							

2 Докажите, что $(\cos x)'' = -\cos x$

3 Докажите, что $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2}$

4 Докажите, что $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)'' = a^x \ln a$

5 Докажите, что $\left(k\dfrac{x^2}{2} + px\right)'' = k$

6 Докажите, что $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)'' = n\cdot\dfrac{x^n}{x}$

7 Докажите, что $(\mathbf{arctg}\, x)'' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

$$\text{Если } \exists\left[f(x)\right]^{(n-1)} \text{ и } \exists\left(\left[f(x)\right]^{(n-1)}\right)' \Rightarrow \Big\{\underbrace{\left[f(x)\right]^{(n-1)}}_{(n-1)\text{-я производная}}\Big\}' = \boxed{\underbrace{\left[f(x)\right]^{(n)}}_{n\text{-я производная}}}$$

Так обозначают производные высших порядков

Пример

$$\boxed{y=\frac{1}{x}}$$

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = (-1)\cdot\frac{1}{x^{1+1}}$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(-\frac{2}{x^3}\right) = (-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2}{x^{2+1}}$$

$$y''' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 2\cdot\left(-\frac{3}{x^4}\right) = (-1)^3\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^{3+1}}$$

1 Докажите, что

$$\left(x^{\mathbf{n}}\right)^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}-1)\cdot(\mathbf{n}-2)\cdot\ \cdots\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Доказательство можно провести на конкретных примерах

ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ

$$y' = \left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x\cdot\ln\mathbf{a}$$

$$y'' = \left(\mathbf{a}^x\cdot\ln\mathbf{a}\right)' = \ln\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x\cdot\ln^2\mathbf{a}$$

$$y''' = \left(\mathbf{a}^x\cdot\ln^3\mathbf{a}\right)' = \ln^2\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x\cdot\ln^3\mathbf{a}$$

$$y^{(4)} = \left(\mathbf{a}^x\cdot\ln^4\mathbf{a}\right)' = \ln^3\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x\cdot\ln^4\mathbf{a}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(\mathbf{n})} = \left(\mathbf{a}^x\cdot\ln^{\mathbf{n}-1}\mathbf{a}\right)' = \cdots = \mathbf{a}^x\cdot\ln^{\mathbf{n}}\mathbf{a}$$

2 Докажите, что

$$\left(\log_{\mathbf{a}} x\right)^{(4)} = -\frac{\ln^2\mathbf{a}}{\mathbf{a}^x}$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

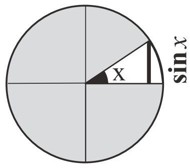
9

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СИНУСА

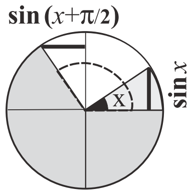
$$y = \sin x \;\rightarrow y^{(4)} = \sin x \;\rightarrow\; y^{(8)} = \sin x \;\rightarrow \cdots$$
$$y' = \cos x \;\rightarrow y^{(5)} = \cos x \;\rightarrow\; y^{(9)} = \cos x \;\rightarrow \cdots$$
$$y'' = -\sin x \rightarrow y^{(6)} = -\sin x \;\rightarrow\; y^{(10)} = -\sin x \rightarrow \cdots$$
$$y''' = -\cos x \rightarrow y^{(7)} = -\cos x \;\rightarrow\; y^{(11)} = -\cos x \rightarrow \cdots$$

$$y = \sin x$$



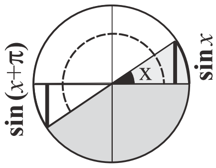
$$y = \sin\left(x + 0\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



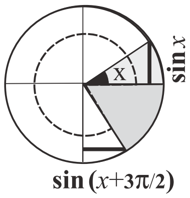
$$y' = \sin\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$$



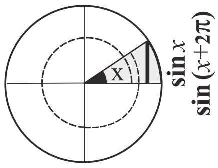
$$y'' = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$



$$y''' = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = \sin x = \sin(x + 2\pi)$$



$$y^{IV} = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

4	Докажите, что

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$y = \cos x$

$y' = -\sin x =$

$y'' = -\cos x =$

$y''' = \sin x =$

$y^{IV} = \cos x =$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Заполните таблицу производных

Дифференцирование

$f''(x) = g'(x)$ ←	$f'(x) = g(x)$ ←	$f(x)$
		$k\frac{x^2}{2} + px$
		$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
		$\ln x$ $(x > 0)$
		$\log_a x$ $(x > 0)$
		$\frac{a^x}{\ln a}$
		e^x
		$\sin x$
		$\mathrm{tg}\, x$
		$\mathrm{ctg}\, x$
		$\mathrm{arc\,tg}\, x$ $-\mathrm{arc\,ctg}\, x$
		$\arcsin x$ $-\arccos x$

Информационная схема

«ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ»

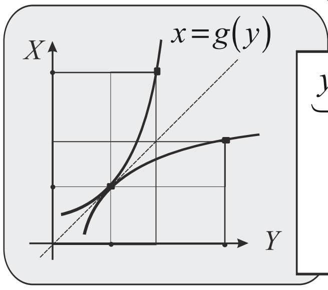
Производная степени

$$\left(x^n\right)' = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n$$

Производная функции в степени

$$\left[f^n(x)\right]' = n \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot f^n(x)$$

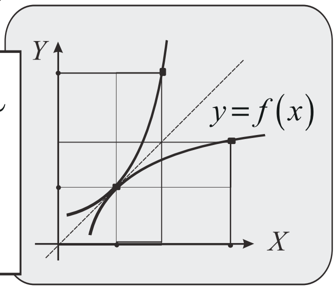
Связь между производными взаимно обратных функций



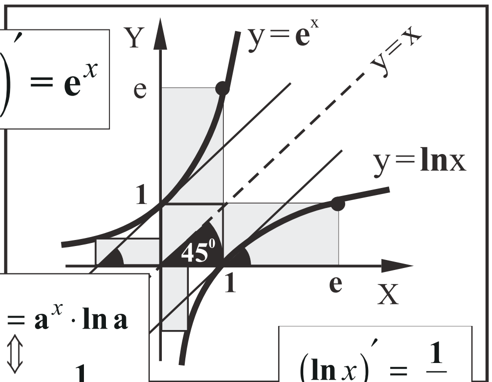
$$\underbrace{y = f(x) \text{ и } x = g(y)}_{\text{взаимно обратные функции}}$$

$$\Downarrow$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$



$$\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x$$



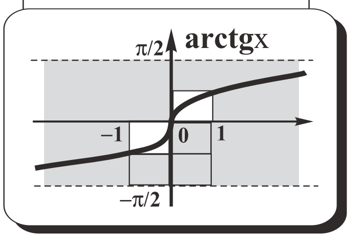
$$\left(\mathbf{a}^x\right)' = \mathbf{a}^x \cdot \ln \mathbf{a}$$

$$\Updownarrow$$

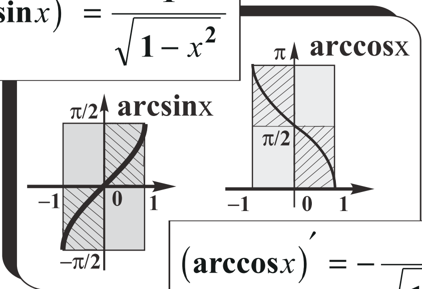
$$\left(\log_{\mathbf{a}} x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln \mathbf{a}}$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

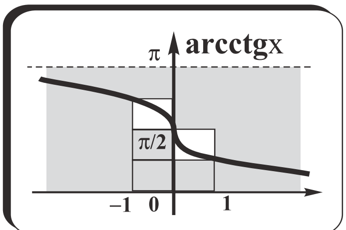
$$\left(\mathbf{arctg}\, x\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$$



$$\left(\mathbf{arcsin}\, x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



$$\left(\mathbf{arccos}\, x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



$$\left(\mathbf{arcctg}\, x\right)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $\left[\cos^3(4-2x)\right]' =$
2. $\left[e^{3x+7}\right]' =$
3. $\left[3^x \cdot e^{\frac{x}{\ln 3}}\right]' =$
4. $\left[3^x \cdot \log_3(x-3)\right]' =$
5. $\left[\dfrac{\text{arcctg}\, 3x - 3}{3}\right]' =$
6. $\left[\arccos^2(1-2x)\right]' =$
7. $\dfrac{f''(x)}{f'(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$
   $f(x) =$

Вариант 2

1. $\left[\dfrac{8/3}{\text{ctg}^3(-8x)}\right]' =$
2. $\left[\dfrac{\left(e^x\right)^7}{7}\right]' =$
3. $\left[e^{\ln 8^{2x-5}}\right]' =$
4. $\left[\dfrac{\ln 2x}{e^{x/2}}\right]' =$
5. $\left[\sqrt[3]{\text{arctg}^2\, 3x}\right]' =$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}\cdot\left[\arcsin(x-1)\right]'} =$
7. $f''(x) = 4$
   при $f(1) = 5$
   $f(x) =$

Вариант 3

1. $\left[\dfrac{x}{\sqrt{\text{tg}(4x+1)}} + \sqrt{\text{tg}(4x+1)}\right]' =$
2. $\left[\dfrac{e^{6-x}}{\sqrt{e^x}}\right]' =$
3. $\left[\dfrac{e^{\left(x^2-3x\right)'}}{\left(x^2-3x^4\right)'_{x^2}}\right]'_{2x} =$
4. $\left[\dfrac{\ln 7\cdot 7^{(5-7x)}}{7\cos(5-7x)}\right]' =$
5. $z = y\cdot\sin x - a^x\cdot\cos y$
   $z'_x =$ $(y = \text{const})$
   $z'_y =$ $(x = \text{const})$
6. $\dfrac{\left[\text{arctg}(3x-4)\right]'}{\left[\text{arcctg}(4-3x)\right]'} =$
7. $-\left[f\left(x^2\right)\right]'_{x^2} = f''(x)$
   $f(x) =$

ОТВЕТЫ

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Тренажер

С. 48, № 2		С. 49, № 3		С. 49, № 4		С. 50, № 1	
1	$\frac{1}{2x}$	1	$4x-3$	1	x^4	1	$-\frac{n\cdot f'(x)}{f^{n+1}(x)}$
2	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	2	$\sin\frac{1}{2x-1}$	2	$\frac{x+1}{x+2}$	2	$\frac{\sqrt[n]{f(x)}\cdot f'(x)}{n\cdot f(x)}$
3	$\frac{1}{x^2}$	3	$\sin(2x-1)$	3	$\frac{1}{(x+1)^2}$	3	$-\frac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)}\cdot f(x)}$
4	x	4	$\frac{1}{2\sin x-1}$	4	$\frac{1}{x^2+1}$	4	$\frac{k\cdot\sqrt[n]{f^k(x)}\cdot f'(x)}{n\cdot f(x)}$
						5	$-\frac{k\cdot f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f^k(x)}\cdot f(x)}$

Тренажер

С. 51, № 2		С. 55, № 2		С. 55, № 3		С. 57, № 2	
1	$-\sin 2x$	1	$3^x\ln 3$	1	e^x	1	$\frac{5}{x\ln 5}$
2	$4\sin^3 x\cos x$	2	$5^x x^4(x\ln 5+5)$	2	$e^3\cdot 3^x\ln 3$	2	$-\frac{1}{x}$
3	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	3	$7^{7x}\ln 7$	3	$\frac{4^x(\ln 4-1)}{e^x}$	3	$\frac{-1}{x\ln^4 x}$
4	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	4	$-7\cdot 2^{5-7x}\ln 2$	4	$8\cdot 2^{8x}\cdot\ln 2$	4	$\frac{1}{2^x}\left(\frac{1}{x\ln 2}-\ln x\right)$
		5	$-\frac{1}{e^{5x}}$	5	$-\frac{\ln 4}{4^x}-\frac{4}{x^5}$		

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

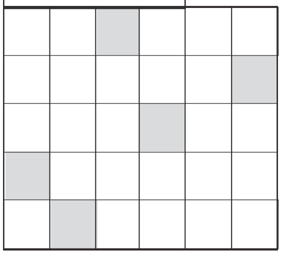
ОТВЕТЫ

Серия

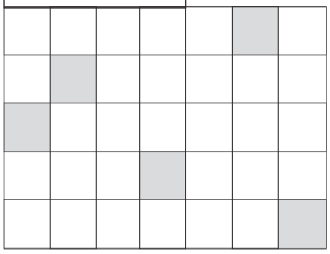
С. 51, № 5	
1	$\dfrac{\sin 2x}{2}$
2	$\dfrac{8\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$
3	$\dfrac{2}{\sin^2(2x)\cdot \operatorname{tg}^3(2x)}$
4	$\dfrac{\sqrt{\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)}}{4\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

Тест

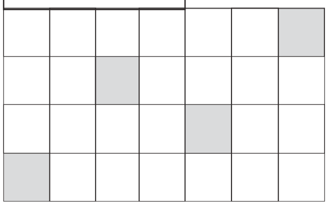
С. 48, № 1



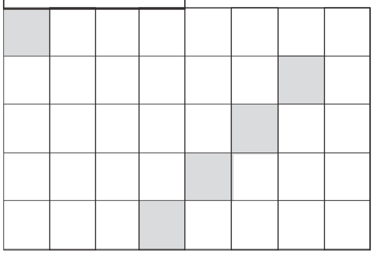
С. 49, № 5



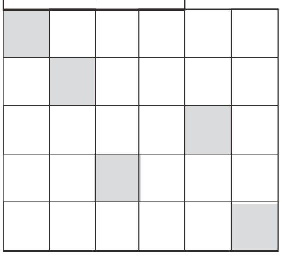
С. 54, № 1



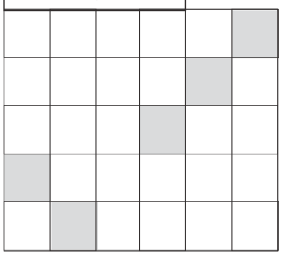
С. 57, № 4



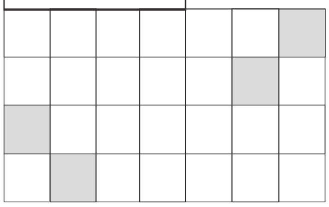
С. 59, № 3



С. 61, № 7



С. 62, № 1



Задачи на доказательство

С. 49, № 6

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=$$

С. 49, № 7

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\ldots$$

Зачет

Найдите производную

1 $\left[\mathbf{k}-\mathbf{p}\cdot f(x)\right]' =$

2 $\left[v\cdot\dfrac{u}{p}\right]' =$

3 $\left[\dfrac{u}{p}-\dfrac{p}{u}\right]' =$

4 $f'\left(x^{-1}\right) =$

5 $\left[\mathbf{e}^{x^2}+\mathbf{e}\cdot x^4\right]'_{x^2} =$

6 $\left[\sin^4 x^2\right]'_{x^{1/2}} =$

7 $\left[\dfrac{x^4}{4}-\ln x^4\right]'_{x^8} =$

8 $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8\cdot \operatorname{ctg}(2x-1)}}\right]' =$

9 $\left[\dfrac{1}{\arccos x}+\dfrac{1}{\arcsin(-x)}\right]' =$

10 $\left[\dfrac{\ln \mathbf{e}^x\cdot\sin x}{\cos x\cdot x^2}\right]' =$

11 $(\sin x)''_{\sin x} =$

12 $(\cos x\cdot\sin x)''_{2x} =$

13 $\left(\operatorname{ctg}^2 x\right)''_{\operatorname{ctg} x} =$

14 Определите структуру функции $g\left[f(x)\right]$ по ее производной $g'_x = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

15 Составьте функцию $y=\sqrt{4-x}$ с аргументом $\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ и найдите ее производную

Докажите, что

16 $1-\cos 2x = 2\cdot\left[(\cos x)'\right]^2$

17 $\operatorname{ctg}^2 x = (-\operatorname{ctg} x)' - 1$

Для функции

$$z = \frac{\ln y}{\cos x} - \frac{1}{\sqrt{y}\sin x}$$

18 найдите z'_x при условии, что $y=\text{const}$

19 найдите z'_y при условии, что $x=\text{const}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

Использованная литература

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл.сред. шк.– М.: Просвещение, 1991.

2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебн. пособие для вузов.– 7-е изд., испр.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

3. Резник Н.А. Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум. Вып. I. Начальные представления о технике интегрирования Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. - 80 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике дифференцирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2002. – 72 с.

СОДЕРЖАНИЕ