Н.А. РЕЗНИК

Начальные представления о технике интегрирования

Визуальный конспект-практикум

ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ
ЦПО «ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Н.А. РЕЗНИК

Начальные представления о технике интегрирования

Визуальный конспект-практикум

Санкт-Петербург
2001

УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. - СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. - 72 с.

Визуальный конспект-практикум ориентирован на формирование начальных представлений по разделу "Неопределенный интеграл" курса высшей математики. Конспект разработан для студентов 1-го курса Мурманского государственного технического университета. В сборнике имеется более 300 задач и упражнений различного уровня сложности. Избыточность банка задач сформирована с целью помочь обучающимся вспомнить основные положения соответствующей темы "Алгебра и начала анализа", а также восстановить утраченные знания и навыки по другим разделам школьного курса математики. Большинство примеров пособия могут быть использованы в качестве дидактических материалов в 11-х классах с углубленным изучением математики.

Составление самостоятельных работ и ответов ко всем задачам практикума осуществлено Казаковой Г.Б.

Наталия Александровна Резник,
Неопределенный интеграл: Визуальный коспект-практикум

Редакторы Авдеева Е.Н., Казакова Г.Б., Плотникова С.В.

ISBN 5-89733-040-9

Утверждено к печати Редакционно-издательским Советом
ЦПО "Информатизация образования" Института продуктивного обучения Российской академии образования
ЛР № 071477 от 25.07.97
Подписано к печати с оригинал-макета 5.06.01.
Тираж 200 экз.

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

1 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

$$\underbrace{\big[F(x)\big]'}_{\text{задана}} = \underbrace{f(x)}_{\text{ищем}}$$

Основная задача дифференцирования

Основная задача: ***дифференцирование***

По заданной $F(x)$ находится $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

$$\boxed{F(x),\ f(x):\ x \in \langle a; b\rangle}$$

$\Downarrow$ $\Uparrow$

Обратная задача: ***интегрирование***

По заданной $f(x)$ находится $F(x)$: $f(x) = F'(x)$

Основная задача интегрирования

$$\big[\overbrace{F(x)}^{\text{ищем}}\big]' = \overbrace{f(x)}^{\text{задана}}$$

ВВЕДЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

$$\boxed{F(x),\ f(x):\ x \in \langle a; b\rangle}$$

$$\big[\underbrace{F(x)}\big]' = \underbrace{f(x)}$$

Первообразная для $f(x)$

Производная от $F(x)$

$$\big[\overbrace{F(x)+C}\big]' = \overbrace{f(x)}$$

C – произвольная постоянная

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРИМЕР

$$\left[\,\mathbf{sin}\,x\,\right]' = \mathbf{cos}\,x$$

Основная задача дифференцирования

Для $\mathbf{sin}\,x$ имеем: $\mathbf{sin}'\,x = \mathbf{cos}\,x$

$$\Downarrow \qquad \boxed{\mathbf{sin}\,x,\ \mathbf{cos}\,x:\ x \in (-\infty; +\infty)} \qquad \Uparrow$$

Для $\mathbf{cos}\,x$ имеем: $\mathbf{cos}\,x = \mathbf{sin}'x$

Основная задача интегрирования

$$\left[\,\mathbf{sin}\,x\,\right]' = \mathbf{cos}\,x$$

ПРИМЕР

$$\boxed{\mathbf{sin}\,x,\ \mathbf{cos}\,x:\ x \in (-\infty; +\infty)}$$

$$\underbrace{\left[\,\mathbf{sin}\,x\,\right]'}_{\text{Первообразная для } \mathbf{cos}\,x} = \underbrace{\mathbf{cos}\,x}_{\text{Производная от } \mathbf{sin}\,x}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \left[\,\mathbf{sin}\,x + \mathbf{1}\,\right]' & = & \mathbf{cos}\,x \\ \left[\,\mathbf{sin}\,x + \mathbf{10}\right]' & = & \mathbf{cos}\,x \\ \left[\,\mathbf{sin}\,x - \mathbf{100}\right]' & = & \mathbf{cos}\,x \end{array}$$

$$\Uparrow$$

$$\Big[\overbrace{\mathbf{sin}\,x + \mathbf{C}}^{\text{Первообразная для } \mathbf{cos}\,x}\Big]' = \overbrace{\mathbf{cos}\,x}^{\text{Производная от } \mathbf{sin}\,x}$$

C – *произвольная постоянная*

2 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЕЙ И ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОМ

$$F(x),\ f(x):\ x \in \langle a;b \rangle$$

$$\boxed{[F(x)]' = f(x)} \qquad F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = f(x)\,dx \qquad \boxed{dF(x) = f(x)\,dx}$$

Операция нахождения

производной *дифференциала*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

$F(x)$
называется
первообразной для $f(x)$,
если
$F'(x) = f(x)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{d}F(x) = F'(x)\,\mathbf{d}x}$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d}F(x) = f(x)\,\mathbf{d}x$$

$$\forall x \in \langle a;b \rangle$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

$$\left.\begin{array}{l} f(x),\ F(x):\ \forall x \in \langle a;b \rangle \\ F(x): \\ f(x) = F'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow d\underbrace{F(x)}_{\substack{\text{первообразной}\\ \text{для функции}\\ f(x)}} = F'(x)\,dx = \underbrace{f(x)\,dx}_{\substack{\text{дифференциала}\\ \text{от функции}\\ F(x)}}$$

Нахождение

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Восстановите отсутствующие данные

в таблице производных — в таблице дифференциалов

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = f(x)\,dx$$

1 Тренажер

1	$(\quad)' = \cos x$
2	$\left(\sqrt{x}\right)' =$
3	$(\quad)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4	$\left[\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]' =$
5	$(-\ln \cos x)' =$

2 Тренажер

$d(\quad) = \sin x\,dx$	1
$d\sqrt{x} = \quad dx$	2
$d \quad = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$	3
$d \ln x =$	4
$d \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} =$	5

Оформите равенство

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx$$

3 Тренажер

1	$d\sin x =$
2	$d\sin 2x =$
3	$d\sin\dfrac{x}{2} =$
4	$d\sin\sqrt{x} =$
5	$d\sin\dfrac{1}{x} =$

4 Тренажер

$d\sin x^2 =$	1
$d\cos(x+1) =$	2
$d\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^2} =$	3
$d\operatorname{arctg}\sqrt{x} =$	4
$d\arccos\dfrac{1}{x} =$	5

5 Докажите, что $d\dfrac{a^x}{\ln a} = a^x\,dx$

6 Докажите, что $d\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1}{x^2-1}dx$

3 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

$\forall x \in <a\,;b>$

$F(x),\ f(x):$

$F'(x) = f(x)$

$\Downarrow$

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$

$\Downarrow$

$[F(x)+C]' = \boxed{F'(x)+C' = F'(x)} = f(x)$

где C – произвольная постоянная

$\Downarrow$

$F(x)+C$ – первообразная для $f(x)$

$\Downarrow$

$F(x)+C$ – множество первообразных для $f(x)$
$\forall x \in <a\,;b>$,
где C – произвольная постоянная

СВЯЗИ МЕЖДУ ПЕРВООБРАЗНЫМИ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФУНКЦИИ

Пусть

$F_1(x),\ F_2(x),\ f(x):$

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x) = f(x) \\ F_2'(x) = f(x) \\ F_1'(x) \neq F_2'(x) \end{array}\right\} \forall x \in \langle a;b\rangle \quad \Rightarrow$$

$$F_1'(x) = F_2'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \left[F_1(x) - F_2(x)\right]' = \mathbf{0} = [\,\mathbf{C}\,]'$$

$$\Downarrow$$

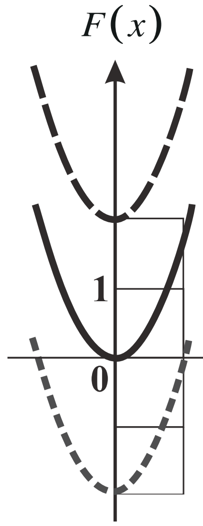
$$F_1(x) - F_2(x) = \mathbf{C} \quad \forall x \in \langle a;b\rangle$$

Две различные первообразные
одной и той же функции,
определенной в некотором промежутке,
с о в п а д а ю т
с точностью до постоянной
(отличаются друг от друга на **const**)

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пример

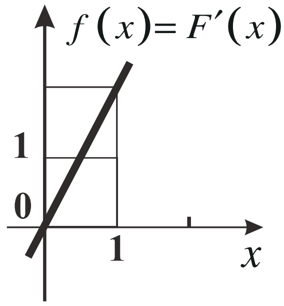
$F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \langle a;b \rangle$



$F_1(x) = x^2 + 2 \Longrightarrow F_1'(x) = 2x$

$F(x) = x^2 \Longrightarrow F'(x) = 2x$

$F_2(x) = x^2 - 2 \Longrightarrow F_2'(x) = 2x$



$(x^2 + C)' = 2x$ $\forall x \in R$

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

$f(x)$	$F(x)$ $+C$
nx^{n-1}	x^n $+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$ $+C$
$\cos x$	$\sin x$ $+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$ $+C$
$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$ $+C$

Функция, для которой находится первообразная

Множество первообразных для исходной функции

1 Серия Восстановите отсутствующие данные в оформлении перехода от функции к ее первообразной

1	$2x \to \square$
2	$3x^{\square} \to x^3$
3	$\square\, x^{-\frac{1}{2}} \to x^{\frac{1}{2}}$
4	$3x^{\square} \to 9x^{\frac{1}{3}}$
5	$\square \to x^{-\frac{4}{5}}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

4 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x)+\boxed{C}}_{\text{неопределенный интеграл функции } f(x)} \quad\Longleftrightarrow\quad \Big[\underbrace{F(x)+\boxed{C}}_{\text{множество всех первообразных для } f(x)}\Big]' = f(x)$$

$\Downarrow$ *Нахождение первообразной для $f(x)$*

$\Downarrow$ *Нахождение производной от $F(x)$*

C – заранее не определено

Операция нахождения множества первообразных для заданной функции называется
и н т е г р и р о в а н и е м

ОБЪЕДИНЕНИЕ ТАБЛИЦ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ $\boxed{+C}$

$f(x)$	$F(x)$
$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Функция

дифференцирование → **Производная**

интегрирование → **Первообразная** $\boxed{+C}$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

РАСШИРЕННАЯ ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Производная — Первообразная $\boxed{+C}$

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\frac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$
$\mathbf{n}x^{\mathbf{n}-1}$	$x^{\mathbf{n}}$	$\frac{x^{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{n}+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln\|\cos x\|$
$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

2 Тренажер

Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных

1	$\int x^3 dx =$
2	$\int \frac{1}{x} dx =$
3	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$
4	$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$
5	$\int \cos x\, dx =$

3 Докажите, что

$$\int\left(\frac{x}{\mathbf{k}}-\frac{1}{\mathbf{p}}\right)dx = \frac{x^2}{2\mathbf{k}}-\frac{x}{\mathbf{p}}+C$$

1 Тренажер

Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных

1	$\int(\mathbf{k}x+\mathbf{p})dx$
2	$\int(3x+2)dx$
3	$\int(2x+3)dx$
4	$\int\left(x-\frac{1}{3}\right)dx$
5	$\int\left(-\frac{1}{2}x-3\right)dx$

4 Докажите, что

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

5 Докажите, что

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2}+C$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

СТРУКТУРА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\underset{\text{символ интеграла}}{\int}\ \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{подынтегральная функция}}\ \underbrace{d\ \overbrace{x}^{\text{переменная интегрирования}}}_{\text{дифференциал независимой переменной}}}_{\text{подынтегральное выражение}}$$

Пример

В интеграле $\int \mathbf{tg}\,\mathbf{2}x\,dx$

подынтегральное выражение $-\ \mathbf{tg}\,\mathbf{2}x\,dx$

подынтегральная функция $-\ \mathbf{tg}\,\mathbf{2}x$

аргумент $-\ \mathbf{2}x$

переменная интегрирования $-\ x$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

СВОЙСТВО	*Доказательство*
$\boxed{d\int}\overbrace{f(x)\,dx}^{\text{подынтегральное выражение}} = f(x)\,dx$	***Дифференциал от неопределенного интеграла*** равен ***подынтегральному выражению*** $d\int f(x)\,dx = d\left[F(x)+C\right] = dF(x) + \underbrace{dC}_{0} = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$ **Пример** $\boxed{d\int}\mathbf{cos\,5}x\,dx = \mathbf{cos\,5}x\,dx$
$\left[\int \overbrace{f(x)}^{\text{подынтегральная функция}}\ dx\right]' = f(x)$	***Производная от неопределенного интеграла*** равна ***подынтегральной функции*** $\left[\int f(x)\,dx\right]' \cdot dx = d\boxed{\int f}(x)\,dx = f(x)\,dx$
$\boxed{\int d}\,F(x) = F(x) + \underbrace{C}_{\text{с точностью до постоянной}}$	***Неопределенный интеграл дифференциала функции*** равен ***самой функции*** **с точностью до постоянной** $\int d\,F(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$ **Пример** $\boxed{\int d}\,\mathbf{cos\,5}x = \mathbf{cos\,5}x + C$
$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$	***Неопределенный интеграл от производной функции*** равен ***самой функции*** **с точностью до постоянной** $\int f'(x)\,dx = \boxed{\int d}\,f(x) = f(x) + C$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1 Тренажер

Запишите результат преобразований

1	$\int d\,\mathbf{cos}\,x =$
2	$d\int d\sqrt{x} =$
3	$\int d\,\mathbf{ln}\,\mathbf{sin}\,x =$
4	$d\int d\,\mathbf{tg}\,x =$
5	$\int d\left(x^{2}-x+\mathbf{1}\right) =$

2 Тренажер

Запишите результат преобразований

1	$\left[\int x\,dx\right]' =$
2	$\left[\int \mathbf{cos}\,x\,dx\right]' =$
3	$\int\left[-\mathbf{ctg}\,x\right]' dx =$
4	$\int\left[\mathbf{ln}\,\mathbf{sin}\,x\right]' dx =$
5	$\left[\int \frac{\mathbf{1}}{x}dx\right]' =$

3 Тест

Найдите интеграл	$\mathbf{tg}\,x$	$\mathbf{tg}\,x+C$	$\mathbf{tg}\,x\,dx$	$\mathbf{tg}\,x\,dx+C$	$-\mathbf{ln}\lvert\mathbf{cos}\,x\rvert$	$-\mathbf{ln}\lvert\mathbf{cos}\,x\rvert+C$
$\int \mathbf{tg}\,x\,dx$						
$\left[\int \mathbf{tg}\,x\,dx\right]'$						
$\int d\,\mathbf{tg}\,x$						
$d\int \mathbf{tg}\,x\,dx$						

4 Докажите, что

если $F'(x)=f(x)$, то $\int f(x)dx-\int dF(x)=C$

6 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЕЕ АРГУМЕНТА

$$y(\,*\,) = f(\,*\,)$$

$$y(\,x\,) = f(\,x\,) \qquad y(\,\mathbf{n}\,) = f(\,\mathbf{n}\,)$$

$$y(\,\alpha\,) = f(\,\alpha\,) \qquad y(\,\mathbf{0}\,) = f(\,\mathbf{0}\,)$$

$$y(\,t\,) = f(\,t\,) \qquad y(\,\mathbf{k}\,) = f(\,\mathbf{k}\,)$$

ВАЖНОЕ СВОЙСТВО ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

В таблице интегралов
обозначения
аргумента подынтегральной функции
и
переменной интегрирования
могут быть
изменены
(***одновременно!***)

$$\int f(\,*\,)\,d\,* = F(\,*\,) + C$$

Пример

$$\int \boxed{*}\,d\,\boxed{*} = \frac{\boxed{*}^{\,2}}{2} + C$$

$$\int \boxed{y}\,d\,\boxed{y} = \frac{\boxed{y}^{\,2}}{2} + C$$

$$\int \boxed{\mathbf{cos}\,t}\,d\,\boxed{\mathbf{cos}\,t} = \frac{\left(\boxed{\mathbf{cos}\,t}\right)^2}{2} + C$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ $f(x \pm \mathbf{p})$

$$x' = \boxed{=\ \mathbf{1}\ =} \ (x \pm \mathbf{p})'$$

$$d\,x = d(x \pm \mathbf{p})$$

$$\int f(x \pm \mathbf{p})\,d\,x = \underbrace{\int f(x \pm \mathbf{p})\,d(x \pm \mathbf{p})}_{\text{применение важного свойства таблицы интегралов}} = \overbrace{F(x \pm \mathbf{p})} + C$$

Пример

$$\int \mathbf{cos}(t + \mathbf{1})\,d\,t =$$

$$= \underbrace{\int \mathbf{cos}(t+\mathbf{1})\,d\,(t+\mathbf{1})}_{\text{мысленно}} =$$

$$= \mathbf{sin}(t+\mathbf{1}) + C$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1 Тест — Найдите значение функции

$y(*)=\dfrac{1}{1+(*)^2}$ при	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
$* = 2$												
$* = \sqrt{2}$												
$* = \frac{1}{2}$												
$* = \frac{1}{\sqrt{2}}$												
$* = \frac{2}{\sqrt{2}}$												

2 Серия — Заполните пропуски в задании функции

$$y(\ *\ )=\frac{2(\ *\ )}{\left[1+(\ *\ )^2\right]^2}$$

1. $$y(\ \mathbf{p}\ )=\frac{2(\ \mathbf{p}\ )}{\left[1+(\quad)^2\right]^2}$$

2. $$y(\ x+\mathbf{k}\ )=\frac{2(\qquad)}{\left[1+(\qquad)^2\right]^2}$$

3. $$y(\ x-\mathbf{kp}\ )=\frac{2(\qquad)}{\left[\qquad\qquad\right]^2}$$

4. $$y(x+\ln\mathbf{p})=\frac{}{\left[\qquad\qquad\right]^2}$$

5. $$y\left(x-\mathbf{e}^{\mathbf{p}-\mathbf{k}}\right)=$$

3 Серия — Найдите интеграл

1. $$\int\frac{dt}{\cos^2 t}$$

2. $$\int\frac{d(s+3)}{1+(s+3)^2}$$

3. $$\int\frac{d\alpha}{\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$$

4. $$\int\frac{d\vartheta}{\vartheta+\sin 3\pi}$$

5. $$\int\frac{d\omega}{1+\left(\omega-\log_2\sqrt{5}\right)^2}$$

Информационная схема

«ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

$\forall x \in \langle a; b\rangle$

$F(x)$ первообразная для $f(x)$,
если
$F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in \langle a; b\rangle$

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x)+C}_{\text{неопределенный интеграл функции } f(x)} \quad \overset{C-\forall}{\Longleftrightarrow} \quad \Big[\underbrace{F(x)+C}_{\text{множество всех первообразных для } f(x)}\Big]' = f(x)$$

СТРУКТУРА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{подынтегральная функция}} \quad \underbrace{d\,\overbrace{x}^{\text{переменная интегрирования}}}_{\text{дифференциал независимой переменной}}}_{\text{подынтегральное выражение}}$$

СТРУКТУРА ТАБЛИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Производная ← Функция → Первообразная $+C$

$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}x + \mathbf{p}$	$\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2} + \mathbf{p}x$

$$\int f(x \pm \mathbf{p})\,dx = \int f(x \pm \mathbf{p})\,d(x \pm \mathbf{p})$$

ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\boxed{d\int} f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

$$\boxed{\int d}\, F(x) = F(x) + C$$

$$\Big[\int \boxed{f(x)}\,dx\Big]' = \boxed{f(x)}$$

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

	1 $-\int \sin x\,dx$	2 $\int (2+x)\,dx$	3 $\int \frac{dt}{1+t^2}$
4 $\int \cos 2x\,d\,2x$	5 $\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,d\,\frac{x}{2}$	6 $\int \frac{d\,s^2}{1+s^2}$	7 $\int 2\left(x^2\right)'dx$

Вариант 2

	1 $\int (-\sin x)'\,dx$	2 $\int \frac{1}{\cos^2(x+2)}\,dx$	3 $\int \frac{d\sqrt{t}}{1+t}$
4 $\int \cos(5x-\alpha)\,d(5x+\alpha)$	5 $\int \operatorname{tg}\left(m+\frac{\pi}{4}\right)dm$	6 $\int \sqrt{x^2+1}\,dx^2$	7 $\int d\left[\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

Вариант 3

	1 $\int \sin^2 x\cdot(\sin x)'\,dx$	2 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$	3 $\int \frac{d\left(\cos^2 2x\right)}{\cos^4 2x}$
4 $\left[\int (x)'\,dx\right]'$	5 $\int \operatorname{tg}\,x\,d\sqrt{\operatorname{tg}\,x}$	6 $\int (\operatorname{tg}s+3)\,d(\operatorname{tg}s-3)$	7 $\int (n-1)\cdot(n+1)\,dn^2$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ОТВЕТЫ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Тренажер

С. 7, № 1		С. 7, № 2		С. 7, № 3	
1	$(\sin x)' = \cos x$	1	$d(-\cos x) = \sin x\,dx$	1	$\cos x\,dx$
2	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	2	$d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$	2	$2\cos 2x\,dx$
3	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	3	$d\operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	3	$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$
4	$\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]' = \frac{1}{\cos x}$	4	$d\ln x = \frac{1}{x}dx$	4	$\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$
5	$(-\ln\cos x)' = \operatorname{tg} x$	5	$d\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{dx}{\sin x}$	5	$-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$

Тренажер

С. 7, № 4		С. 11, № 1		С. 11, № 2		С. 13, № 1		С. 13, № 2	
1	$2x\cos x^2 dx$	1	[illegible]	1	$\frac{x^4}{4}+C$	1	$\cos x + C$	1	x
2	$-\sin(x+1)dx$	2	$3\frac{x^2}{2}+2x+C$	2	$\ln\lvert x\rvert + C$	2	$d\sqrt{x}$	2	$\cos x$
3	$-\frac{2dx}{x^3\cos^2\frac{1}{x^2}}$	3	x^2+3x+C	3	$\operatorname{tg} x + C$	3	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	3	$-\operatorname{ctg} x + C$
4	$\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x^2)}$	4	$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+C$	4	$\operatorname{arctg} x + C$	4	$d\operatorname{tg} x$	4	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
5	$\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$	5	$-\frac{x^2}{4}-3x+C$	5	$\sin x + C$	5	$\underbrace{(x^2-x+1)+C}_{C^*}$	5	$\frac{1}{x}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ОТВЕТЫ

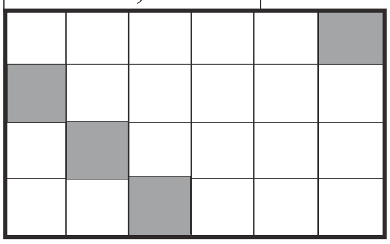
ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Серия

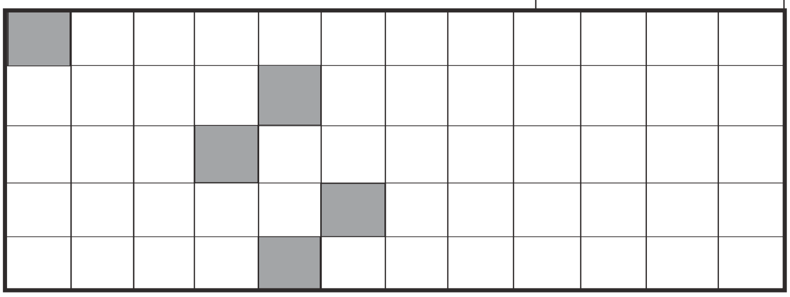
С. 9, № 1	С. 15, № 2	С. 15, № 3
1 $\;2x \to x^2$	1 $\;\dfrac{2(\mathbf{p})}{\left[1+(\mathbf{p})^2\right]^2}$	1 $\;\mathbf{tg}\,t + C$
2 $\;3x^2 \to x^3$	2 $\;\dfrac{2(x+\mathbf{k})}{\left[1+(x+\mathbf{k})^2\right]^2}$	2 $\;\mathbf{arctg}(s+3)+C$
3 $\;\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \to x^{\frac{1}{2}}$	3 $\;\dfrac{2(x-\mathbf{kp})}{\left[1+(x-\mathbf{kp})^2\right]^2}$	3 $\;\mathbf{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+C$
4 $\;3x^{-\frac{2}{3}} \to 9x^{\frac{1}{3}}$	4 $\;\dfrac{2(x+\mathbf{ln\,p})}{\left[1+(x+\mathbf{ln\,p})^2\right]^2}$	4 $\;\ln\left\vert\vartheta+\sin 3\pi\right\vert + C$
5 $\;-\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}} \to x^{-\frac{4}{5}}$	5 $\;\dfrac{2(x-\mathbf{e}^{\mathbf{p-k}})}{\left[1+(x-\mathbf{e}^{\mathbf{p-k}})^2\right]^2}$	5 $\;\mathbf{arctg}\left(\omega-\log_2\sqrt{5}\right)+C$

Тест

С. 13, № 3



С. 15, № 1



ОТВЕТЫ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задачи на доказательство

С. 7, № 4

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \left(a^x\right)' dx =$$

С.7. № 5

$$= d\left(\ln\sqrt{x-1} - \ln\sqrt{x+1}\right) = \left(\ln\sqrt{x-1} - \ln\sqrt{x+1}\right)' dx =$$

С. 11, № 3

1-й способ: $$\int\left(\frac{x}{k} - \frac{1}{p}\right)dx = \int\left[\frac{1}{k}\cdot x + \left(-\frac{1}{p}\right)\right]dx = \cdots$$

2-й способ: $$\left(\frac{x^2}{2k} - \frac{x}{p} + C\right)' = \cdots$$

С. 11, № 4

$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow (\ln x + C)' = \cdots$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow [\ln(-x) + C]' = \cdots$$

С. 11, № 5

$$\left(\frac{1}{1+x^2} + C\right)' = \cdots$$

С. 13, № 4

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx - \int dF(x) = [F(x)+C_1] - [F(x)+C_2] = \cdots$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

1 ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ВЫНЕСЕНИЕ ЧИСЛА ЗА ЗНАК ИНТЕГРАЛА

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$$

$$F(x) : F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a\,; b\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F(x) + C = \int f(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}\cdot F'(x) = \mathbf{A}\cdot f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\cdot F(x) + \mathbf{A}\cdot C = \mathbf{A}\cdot \int f(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\mathbf{A}\cdot F(x)\right]' = \mathbf{A}\cdot f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\cdot F(x) + C^* = \int \mathbf{A}\cdot f(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int \mathbf{A}\cdot f(x)\,dx = \mathbf{A}\cdot F(x) + C^* = \mathbf{A}\cdot \int f(x)\,dx$$

ВЫВОД ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\left(x^{\mathbf{n+1}}\right)' = (\mathbf{n+1})\cdot x^{\mathbf{n}} \Leftrightarrow \int \left[(\mathbf{n}+\mathbf{1})\cdot x^{\mathbf{n}}\right] d\,x = x^{\mathbf{n+1}} + C,$$

$\forall\ \mathbf{n > 0}$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{n}+\mathbf{1})\int x^{\mathbf{n}}\,d\,x = x^{\mathbf{n+1}} + C\,,$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int x^{\mathbf{n}}\,d\,x = \frac{x^{\mathbf{n+1}}}{\mathbf{n}+\mathbf{1}} + C}\,,$$

$$\Downarrow$$

$\forall\ \mathbf{n > 0}$, $\mathbf{n \neq 1}$

$$\int x^{-\mathbf{n}}\,d\,x = \frac{x^{-\mathbf{n+1}}}{-\mathbf{n}+\mathbf{1}} + C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int \frac{d\,x}{x^{\mathbf{n}}} = -\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})\,x^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}} + C}$$

Пример

$$\int \frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{10}}}\,d\,x =$$

$$= \underbrace{-\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{10}-\mathbf{1})\,x^{\mathbf{10}-\mathbf{1}}}}_{\text{ì ûñëåí íî}} + C =$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}\,x^{\mathbf{9}}} + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1 Докажите, что

$$\frac{\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x \pm \mathbf{p}}}\,dx}{\mathbf{2}} = \sqrt{x \pm \mathbf{p}} + C$$

2 Докажите, что

$$\int \left(x + \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{A}} \right) dx = \frac{(\mathbf{A}x + \mathbf{p})^2}{\mathbf{2A}^2} + C$$

3 Докажите, что

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{B}x}\, d\,\mathbf{A}x = \frac{\mathbf{A}\,\mathbf{ln}|x|}{\mathbf{B}} + C$$

4 Тренажер

Найдите интеграл	
1	$\int x\,dx =$
2	$\int \mathbf{5}x^{\mathbf{4}}\,dx =$
3	$\int \frac{x^{\mathbf{5}}}{\mathbf{4}}\,dx =$
4	$\int \frac{\mathbf{5}}{x^{\mathbf{4}}}\,dx =$
5	$\int \left(-\frac{\mathbf{4}}{x^{\mathbf{5}}} \right) dx =$

5 Серия

Найдите интеграл	
1	$\int \mathbf{2}(x+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}\,dx =$
2	$\int \frac{\mathbf{sin}(x+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}\,dx =$
3	$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}x-\mathbf{2}}\,dx =$
4	$\int \sqrt{\mathbf{e}}\,\mathbf{tg}(x-\mathbf{1})\,dx =$
5	$\int \frac{\mathbf{2}}{\pi\,\mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\left(x-\sqrt{\pi}\right)}\,dx =$

2 ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ И РАДИКАЛОВ

$$x^{n}\cdot x^{m}=x^{n+m}\qquad \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[m]{x}=\sqrt[n\cdot m]{x^{n+m}}$$

$$\frac{x^{n}}{x^{m}}=x^{n-m}\qquad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\cdot m]{x^{n-m}}$$

$$\left(x^{n}\right)^{m}=x^{n\cdot m}$$

$n, m\in R$

1 Докажите, что

$$\int\sqrt[n]{x}\,\sqrt[m]{x}\,dx=\frac{x^{\frac{n+m}{n\cdot m}}\sqrt{x}}{\frac{n+m}{n\cdot m}+1}+C$$

МАТРИЦА **2** Для каждого выражения выполните действия:

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ ДЛЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ	преобразуйте в выражение вида x^{n}	найдите число $n+1$	запишите первообразную в виде $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	преобразуйте полученную первообразную к виду, аналогичному исходному
x^2				
$\frac{1}{x^2}$				
$\sqrt{x}$				
$\frac{1}{\sqrt{x}}$				
$\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$				

3 Докажите, что

$$\int\frac{1}{\sqrt[k]{(x\pm p)^{n}}}\,dx=\frac{k}{k-n}\cdot\frac{x\pm p}{\sqrt[k]{(x\pm p)^{n}}}+C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

4 Докажите, что

$$\int \sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{n}x}\,dx = \frac{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{n}^{1+\mathbf{n}}x^{1+\mathbf{n}}}}{\mathbf{1}+\mathbf{n}} + C$$

5 Докажите, что

$$\int \frac{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}x}}{\sqrt[\mathbf{m}]{\mathbf{B}^{\mathbf{m}-1}x}}\,dx = \frac{\mathbf{A}\cdot\sqrt[\mathbf{m}]{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{A}}}\int \sqrt[\mathbf{nm}]{x}^{\,\mathbf{n}-\mathbf{m}}\,dx$$

6 Докажите, что

$$\int x\sqrt[\mathbf{n}]{x}\,dx = \frac{\mathbf{n}x^{2}\sqrt[\mathbf{n}]{x}}{\mathbf{2n}+\mathbf{1}} + C$$

7 Серия. Найдите интеграл

1	$\int\left(x\cdot x^{-1}\right)dx =$
2	$\int\left(x^{-2}\cdot x^{3}\right)dx =$
3	$\int\left(\mathbf{2}x^{2}\cdot\mathbf{3}x^{-3}\right)dx =$
4	$\int\left(\mathbf{2}x\right)^{-2}\cdot x\,dx =$
5	$\int\frac{\left(x+\mathbf{2}\right)\cdot\left[\mathbf{2}\left(x+\mathbf{2}\right)\right]^{3}}{\mathbf{2}}dx =$

3 ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

$\mathbf{k}, \mathbf{n} \in N$, $\mathbf{n} \neq \mathbf{1}$

	$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	
	$\mathbf{n} \cdot x^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}$ $\Downarrow$	$x^{\mathbf{n}}$ $\Downarrow$	$\dfrac{x^{\mathbf{n}+\mathbf{1}}}{\mathbf{1}+\mathbf{n}} + C$ $\Downarrow$	
1		$\dfrac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}$		1
2		$\sqrt[\mathbf{n}]{x}$		2
3		$\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}$		3
4		$\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}$		4
5		$\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$		5

1 Тренажер

2 Тренажер

Запишите результаты

дифференцирования *интегрирования*

3 Докажите, что

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}-\mathbf{n})\,x^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}}\right]' + \int \frac{\mathbf{n}}{x^{\mathbf{n}+\mathbf{1}}}\,dx = C \quad \forall\, n \neq \mathbf{1}$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

4 Докажите, что

$$\int x \sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{p}}}\, dx = \frac{\mathbf{n}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{2n+p}}}}{\mathbf{2n+p}} + C$$

5 Докажите, что

$$\int x^{\mathbf{k}} \sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{p}}}\, dx = \frac{\mathbf{n}\cdot x^{\mathbf{k+1}}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{p}}}}{\mathbf{kn+p}+n} + C$$

6 Тренажер

	Найдите интеграл
1	$\int \sqrt{x+\mathbf{1}}\; dx =$
2	$\int \sqrt[\mathbf{4}]{x+\mathbf{1}}\, dx =$
3	$\int \sqrt[\mathbf{5}]{(x+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}\, dx =$
4	$\int \sqrt[\mathbf{5}]{\left(x-\sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}}}\, dx =$
5	$\int (x-\mathbf{1})^{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}}\, dx =$

7 Серия

	Найдите интеграл
1	$\int \mathbf{2}\sqrt{x}\; dx =$
2	$\int \sqrt{\mathbf{2}x}\; dx =$
3	$\int \sqrt{\sqrt{\mathbf{2}}}\; x\; dx =$
4	$\int \sqrt{\sqrt{\mathbf{2}\, x}}\; dx =$
5	$\int \frac{\sqrt{x\sqrt{\mathbf{2}x}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\; dx =$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

4 ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ИНТЕГРАЛ СУММЫ

$$]\, f(x),\, g(x):\ x\in\langle a\,;b\rangle$$

$$F(x),\, G(x):\ \begin{matrix} F'(x)=f(x) \\ G'(x)=g(x) \end{matrix}\quad \forall\, x\in\langle a\,;b\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x)\pm G'(x)=f(x)\pm g(x)\ \Leftrightarrow\ F(x)\pm G(x)+\underbrace{C_f\pm C_g}_{C}=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{matrix} F'(x)=f(x) & \Leftrightarrow & F(x)+C_f=\int f(x)\,dx \\ G'(x)=g(x) & \Leftrightarrow & G(x)+C_g=\int g(x)\,dx \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\big[F(x)\pm G(x)\big]'=f(x)\pm g(x)\ \Leftrightarrow\ F(x)\pm G(x)+C=\int\big[f(x)\pm g(x)\big]\,dx$$

Пример

$$\int\left(x^2+\mathbf{6}x+\mathbf{1}\right)dx=\underbrace{\int\left[\left(x^2+\mathbf{6}x+\mathbf{9}\right)-\mathbf{8}\right]dx}_{\text{мысленно}}=\int\left[(x+\mathbf{3})^2-\mathbf{8}\right]dx=$$

$$=\int(x+\mathbf{3})^2\,dx-\int\mathbf{8}\,dx=\underbrace{\int(x+\mathbf{3})^2\,d(x+\mathbf{3})}_{\text{мысленно}}-\underbrace{\mathbf{8}\int d\,x}_{\text{мысленно}}=\frac{(x+\mathbf{3})^3}{\mathbf{3}}-\mathbf{8}+C$$

Тренажер 1	Найдите интеграл	и сравните результаты	Найдите интеграл	Тренажер 2
1	$\int\left(x^2+\mathbf{2}x+\mathbf{2}\right)dx=$		$\int\left[(x+\mathbf{1})^2+\mathbf{1}\right]dx=$	1
2	$\int\left(x^2-\mathbf{3}x+\mathbf{1}\right)dx=$		$\int\left[(x-\mathbf{1})^2-x\right]dx=$	2
3	$\int\left(x^3+\mathbf{3}x^2+\mathbf{5}x+\mathbf{1}\right)dx=$		$\int\left[(x+\mathbf{1})^3+\mathbf{2}x\right]dx=$	3
4	$\int\left(x^3-\mathbf{3}x^2+\mathbf{3}x+\mathbf{2}\right)dx=$		$\int\left[(x-\mathbf{1})^3-x+\mathbf{1}\right]dx=$	4
5	$\int\left(x^3+\mathbf{3}x^2+\mathbf{4}x+\mathbf{1}\right)dx=$		$\int\left[(x+\mathbf{1})^3+x\right]dx=$	5

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

3	Докажите, что	$\mathbf{a>0,\neq 1:}\ \int\left[\mathbf{e}^x+\mathbf{a}^x\right]dx=\mathbf{e}^x+\dfrac{\mathbf{a}^x}{\mathbf{lna}}+C$

4 Тренажер

	Найдите интеграл
1	$\int\left(x^5+\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt[5]{x}}-\dfrac{x}{\mathbf{5}}\right)dx$
2	$\int\left(\mathbf{1}-\sqrt{x}+x\right)dx$
3	$\int\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}-\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\mathbf{3}x}\right)dx$
4	$\int\left(\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}+\mathbf{2}\sqrt{x^3}\right)dx$
5	$\int\left(\dfrac{\mathbf{2}}{x\sqrt{x}}+\dfrac{\mathbf{5}x\sqrt{x}}{\mathbf{2}}\right)dx$

5 Серия Найдите интеграл

1 $\int\left[\mathbf{2}^x+\mathbf{e}^x\right]dx=$

2 $\int\left[x-\mathbf{cos}(x-\mathbf{2})\right]dx=$

3 $\int\left(\dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{2}+x}}{\mathbf{2}}+\dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^{\mathbf{2}+x}}\right)dx=$

4 $\int\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}(x-\mathbf{2})}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin^2}(x+\mathbf{2})}\right)dx=$

5 $\int\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\left(\dfrac{\mathbf{1+2}x}{\mathbf{2}}\right)}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{ctg}\,(x-\mathbf{1})}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin^2}(x-\mathbf{2})}dx=$

5 ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Формулы сокращенного умножения

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

$$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$$

Пример

$$\int \frac{x^3+1}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx = \int (x^2-x+1)dx =$$
$$= \int x^2dx - \int x\,dx + \int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$

Пример

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int (\sqrt{x}+1)dx =$$
$$= \int \sqrt{x}\,dx + \boxed{\int d}\,x =$$
$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + C$$

1 Докажите, что

$$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2} + C$$

2 Докажите, что

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx = 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2\sqrt{x} - x^2 + 3x + 1\right) + C$$

3 Докажите, что

$$\int (x - \sqrt{x} + x\sqrt{x})(x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x)dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

4 Тренажер

	Найдите интеграл
1	$\int x\left(x-\mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}dx$
2	$\int \left(\mathbf{1}+x^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}dx$
3	$\int \left(\frac{\mathbf{1}-x}{x}\right)^{\mathbf{2}}dx$
4	$\int \frac{\left(x+\mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}}{x}dx$
5	$\int \frac{x-\mathbf{1}}{\sqrt{x}}\,dx$

5 Тренажер

	Найдите интеграл
1	$\int \frac{\sqrt{x}-\mathbf{4}}{\sqrt[4]{x}+\mathbf{2}}\,dx$
2	$\int \frac{\sqrt{x}-\mathbf{2}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{\mathbf{2}}}\,dx$
3	$\int \frac{\sqrt{x}+\mathbf{2}\sqrt[4]{x}+\mathbf{1}}{\sqrt[4]{x}+\mathbf{1}}\,dx$
4	$\int \frac{\sqrt[4]{x^{\mathbf{3}}}-\mathbf{1}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\mathbf{1}}\,dx$
5	$\int \frac{\sqrt{x}-\mathbf{2}\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-\mathbf{2}}\,dx=$

6

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

СОСТАВЛЯЮЩИЕ «НЕПРАВИЛЬНОЙ» ДРОБИ

$$\underbrace{\frac{\mathbf{A}}{x+\mathbf{a}}}_{\text{простейшая дробь}}$$

$$\frac{x+\mathbf{p}}{x+\mathbf{n}} = \frac{x+\mathbf{n}\ +\ (\mathbf{p}-\mathbf{n})}{x+\mathbf{n}} = \underbrace{\frac{x+\mathbf{n}}{x+\mathbf{n}}}_{\text{целая часть}} + \underbrace{\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{n})}{x+\mathbf{n}}}_{\text{простейшая дробь}}$$

$$\frac{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}{\mathbf{r}x+\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k}\cdot\left(x+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{k}}\right)}{\mathbf{r}\cdot\left(x+\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}\right)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r}}\cdot\left(\frac{x+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{k}}}{x+\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}}\right) =$$

$$= \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r}}\cdot\left(\frac{x+\mathbf{P}}{x+\mathbf{N}}\right) =$$

$$= \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r}}\cdot\left[\frac{(x+\mathbf{N})+(\mathbf{P}-\mathbf{N})}{x+\mathbf{N}}\right] = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r}}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{\mathbf{P}-\mathbf{N}}{x+\mathbf{N}}}_{\text{простейшая дробь}}\right)$$

Пример

$$\int\frac{x+7}{x-5}\,dx =$$

$$= \int\frac{(x-5)+(7+5)}{x-5}\,dx = \int\left(1+\frac{12}{x-5}\right)dx =$$

$$= \int dx + 12\int\frac{dx}{x-5} = x + 12\,\mathbf{ln}|x-5| + C$$

Пример

$$\frac{6x+1}{3x+5} = \frac{6\cdot\left(x+\frac{1}{6}\right)}{3\cdot\left(x+\frac{5}{3}\right)} = 2\cdot\left(\frac{x+\frac{5}{3}+\frac{1}{6}-\frac{5}{3}}{x+\frac{5}{3}}\right) = 2\cdot\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{x+\frac{5}{3}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{6x+1}{3x+5}dx = 2\cdot\left[\int dx - \frac{3}{2}\cdot\int\frac{1}{x+\frac{5}{3}}\,dx\right] = 2\cdot\left[x - \frac{3}{2}\cdot\mathbf{ln}\left|x+\frac{5}{3}\right|\right] + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Разложите дробь на составляющие
и найдите

2 Тренажер	производную	1 Тренажер	интеграл	3 Тренажер
1		$\frac{x+2}{x+1}=$		1
2		$\frac{x-1}{x}=$		2
3		$\frac{x-1}{x+2}=$		3
4		$\frac{1-x}{x+1}=$		4
5		$\frac{x+2}{2-x}=$		5

Серия **4**

Каждую дробь	разложите на составляющие	и найдите интеграл
1 $\frac{2x-1}{x-2}$		
2 $\frac{x+2}{2x+1}$		
3 $\frac{3x-2}{2x-3}$		
4 $\frac{x}{1-2x}$		
5 $\frac{2x-3}{2-3x}$		

7 ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

$\forall x > 0$

$$\log_x x = 1$$

$\forall y > 0, \neq 1$

$$x^{\log_x y} = y$$

$\forall x > 0$

$\forall x$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a |x|$$

Пример

$$\int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} \right) dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{1}{x+3}\, dx + \int \frac{1}{x-3}\, dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \underbrace{\int \frac{d(x+3)}{x+3} + \int \frac{d(x-3)}{x-3}}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \ln|x+3| + \ln|x-3| + C =$$

$$= \underbrace{\ln|(x+3)\cdot(x-3)| + C}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \ln|x^2 - 9| + C$$

Пример

$$\int \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{2}{x-3}\, dx - \int \frac{3}{x-2}\, dx}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \underbrace{2 \cdot \int \frac{dx}{x-3} - 3 \cdot \int \frac{dx}{x-2}}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \underbrace{2 \cdot \int \frac{d(x-3)}{x-3} - 3 \cdot \int \frac{d(x-2)}{x-2}}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= 2\ln|x-3| \quad + 3 \cdot \ln|x-2| + C =$$

$$= \underbrace{\ln(x-3)^2 - \quad \ln|x-2|^3 + C}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \ln \frac{(x-3)^2}{|x-2|^3} + C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1 Тест — Найдите соответствующую подынтегральную функцию

по заданной первообразной	$\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1}$	$\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x+1}$	$\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}$	$\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}$	$\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x-1}$
$\ln\frac{(x+1)^4}{\lvert x-1\rvert^3}$					
$\ln\frac{\lvert x-1\rvert^3}{(x+1)^4}$					
$\ln\frac{\lvert x+1\rvert^3}{(x-1)^4}$					
$\ln\frac{(x-1)^4}{\lvert x+1\rvert^3}$					
$\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert^3$					

2 Серия — Найдите интеграл

1. $\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx=$
2. $\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=$
3. $\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx=$
4. $\int\left(\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}\right)dx=$
5. $\int\left(\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{3x+1}\right)dx=$

8

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ $\frac{1}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}$ НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Простейшая дробь $\frac{\mathbf{A}}{x+\mathbf{a}}$

$$\frac{1}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}=\frac{\mathbf{A}}{(x-\mathbf{a})}+\frac{\mathbf{B}}{(x-\mathbf{b})}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}=\frac{\mathbf{A}(x-\mathbf{b})+\mathbf{B}(x-\mathbf{a})}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 = \mathbf{A}(x-\mathbf{b})+\mathbf{B}(x-\mathbf{a})$$

$$1+0\cdot(x-\mathbf{b})+0\cdot(x-\mathbf{a}) = 0+\mathbf{A}(x-\mathbf{b})+\mathbf{B}(x-\mathbf{a})$$

$$\Downarrow$$

$при\ \ x=\mathbf{a}:\ 1 = \mathbf{A}(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{B}\cdot 0 \Rightarrow \mathbf{A}=\frac{1}{\mathbf{a}-\mathbf{b}}$

подстановка

$при\ \ x=\mathbf{b}:\ 1 = \mathbf{A}\cdot 0+\mathbf{B}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{B}=\frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})(x-\mathbf{a})}+\frac{1}{(\mathbf{b}-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}=\frac{1}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ $\frac{1}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}$

$$\int\frac{dx}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}=$$

$$\frac{1}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})}\cdot\int\frac{d(x-\mathbf{a})}{(x-\mathbf{a})}+\frac{1}{(\mathbf{b}-\mathbf{a})}\cdot\int\frac{d(x-\mathbf{b})}{(x-\mathbf{b})}$$

$$=\frac{\mathbf{ln}|x-\mathbf{a}|}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})}+\frac{\mathbf{ln}|x-\mathbf{b}|}{(\mathbf{b}-\mathbf{a})}+C$$

1 Докажите, что дробь $\frac{1}{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}$ можно преобразовать в простейшую

2 Докажите, что

$$\int\frac{dx}{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}=\frac{\mathbf{ln}\left|x+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{k}}\right|}{\mathbf{k}}+C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

3 Серия

Каждую дробь разложите на простейшие дроби

1	$\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$
2	$\dfrac{1}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$
3	$\dfrac{1}{x(x-2)}$
4	$\dfrac{1}{x^2-\frac{1}{4}}$
5	$\dfrac{1}{x(2x-1)}$

4 Тренажер

5 Тренажер

	Приведите интеграл к виду, удобному для интегрирования		Найдите интеграл	
1		$\int\dfrac{dx}{(x-1)(x+2)}$		1
2		$\int\dfrac{dx}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$		2
3		$\int\dfrac{dx}{x(x-2)}$		3
4		$\int\dfrac{dx}{x^2-\frac{1}{4}}$		4
5		$\int\dfrac{dx}{x(2x-1)}$		5

9 ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ $\dfrac{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}$ **НА СУММУ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ**

$$\frac{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}=\frac{\mathbf{A}}{x-\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{B}}{x-\mathbf{b}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{k}x+\mathbf{p}=\mathbf{A}(x-\mathbf{b})+\mathbf{B}(x-\mathbf{a})$$

$$\Downarrow$$

при $x=\mathbf{a}$: $\mathbf{ka+p}=\mathbf{A}(\mathbf{a}-\mathbf{b})+0 \Rightarrow \mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{ka+p}}{\mathbf{a-b}}$

подстановка

при $x=\mathbf{b}$: $\mathbf{kb+p}=0+\mathbf{B}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{B}=\dfrac{\mathbf{kb+p}}{\mathbf{b-a}}$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}dx=\frac{\mathbf{ka+p}}{\mathbf{a-b}}\cdot\int\frac{d(x-\mathbf{a})}{x-\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{kb+p}}{\mathbf{b-a}}\cdot\int\frac{d(x-\mathbf{b})}{(x-\mathbf{b})}$$

Пример

$$\frac{3x-2}{(x-3)(x+2)}=\frac{\mathbf{A}}{x-3}+\frac{\mathbf{B}}{x+2}$$

$$3x-2=\mathbf{A}(x+2)+\mathbf{B}(x-3)$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{x=3} \Rightarrow 3\cdot 3-2=\mathbf{A}(3+2) \Rightarrow \mathbf{A}=\dfrac{7}{5}$

$\boxed{x=-2} \Rightarrow 3\cdot(-2)-2=\mathbf{B}(-2-3) \Rightarrow \mathbf{B}=\dfrac{8}{5}$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{3x-2}{(x-3)(x+2)}dx=\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{8}{5}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{7}{5}\ln|x-3|+\frac{8}{5}\ln|x+2|+C$$

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1 Тест. Определите коэффициенты дроби

в ее разложении вида $\dfrac{\mathbf{A}}{x-1}+\dfrac{\mathbf{B}}{x+1}$												
	A =	**3**	**2**	**5**	**5**	**2**	**5**	**3**	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	B =	**−2**	**−3**	**5**	**2**	**3**	**3**	**2**	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\dfrac{5x}{x^2-1}$												
$\dfrac{5x-1}{x^2-1}$												
$\dfrac{5x+1}{x^2-1}$												
$\dfrac{5-x}{x^2-1}$												
$\dfrac{x+5}{x^2-1}$												

2 Серия

Каждую дробь	разложте на простейшие	найдите интеграл
1 $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$		
2 $\dfrac{2}{(x+1)(x-2)}$		
3 $\dfrac{2x}{(x+1)(x-2)}$		
4 $\dfrac{2x}{(x-1)(x+2)}$		
5 $\dfrac{1-x}{x^2-4}$		

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

Информационная схема

«ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ»

СТРУКТУРА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\underbrace{\int \underbrace{f(x)}_{\text{подынтегральная функция}} \; \underbrace{d\,\overbrace{x}^{\text{переменная интегрирования}}}_{\text{дифференциал независимой переменной}}}_{\text{подынтегральное выражение}}$$

ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ

$$\int f(*)\,d* = F(*) + \mathbf{C}$$

ЧИСЛОВОЙ МНОЖИТЕЛЬ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

$$\int \mathbf{A} f(x)\,dx = \mathbf{A}\cdot\int f(x)\,dx$$

ИНТЕГРАЛ СУММЫ

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int x^{\mathbf{n}}\,dx = \frac{x}{\mathbf{1+n}}\cdot x^{\mathbf{n}} + C$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}}\,dx = \frac{x}{\mathbf{1-n}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{n}}} + C$$

$$\int \sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}\,dx = \frac{\mathbf{n}x}{\mathbf{k+n}}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}} + C$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}\,dx = \frac{\mathbf{k}x}{\mathbf{k-n}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}} + C$$

$$\frac{\mathbf{k}x+\mathbf{p}}{\mathbf{r}x+\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r}}\cdot\left(\mathbf{1} + \underbrace{\frac{\mathbf{P-N}}{x+\mathbf{N}}}_{\text{простейшая дробь}}\right)$$

Разложение дроби на простейшие

$$\int \frac{\mathbf{k}\,x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}\,dx = \mathbf{A}\int\frac{dx}{x-\mathbf{a}} + \mathbf{B}\int\frac{dx}{x-\mathbf{b}}$$

А *и* **В** *находятся* **методом подстановки**

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

	1 $\int \frac{\sin 3x}{3}\,dx$	2 $\int \frac{5}{x}\,d\,\frac{1}{5x}$	3 $\int \frac{3}{2}\,d\,\frac{2}{3}\sqrt{\cos x}$
4 $\int \frac{\pi x-1}{\pi x}\,d\pi x$	5 $\int \frac{3\,dx}{(x+2)(1-x)}$	6 $\int \frac{2x-4}{(x-3)(x+1)}\,dx$	7 $\int (\operatorname{tg}2x+2x+2)\,d\,2x$

Вариант 2

1 $\int 4\sin\left(\frac{x+4}{4}\right)d\left(\frac{x}{4}-1\right)$	2 $\int \left[(\sqrt{x}-1)^2-1\right]d\sqrt{x}$	3 $\int \left(\frac{3\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)dx$	
4 $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$	5 $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$	6 $\int \frac{1+x}{15x-3x^2-12}\,dx$	7 $\int (2\operatorname{tg}x\cdot\cos x-3\operatorname{ctg}x\cdot\sin x)\,dx$

Вариант 3

	1 $\int \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{3}\right)}{\ln 3}\,d\,\frac{3x}{\ln 3}$	2 $\int \left[(\sqrt{x}-1)^2+1\right]dx$	3 $\int \frac{\cos 3x}{3}\,d\,9x$
4 $\frac{27}{4}\int \frac{4}{9}\ln x\,d\,\frac{2}{3}\sqrt{\ln x}$	5 $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$	6 $\int \frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-x+1}\,dx$	7 $\int \frac{\sin^2 e^x-\cos^2 e^x}{\sin^2 e^x\cdot\cos^2 e^x}\,d\,e^x$

ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Тренажер

С. 23, № 4		С. 26, № 1		С. 27, № 2		С. 25, № 6	
1	x^5+C	1	$-\frac{\mathbf{n}}{x^{\mathbf{n}+1}}$	1	$-\frac{1}{(\mathbf{n}-1)\,x^{\mathbf{n}-1}}+C$	1	$\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$
2	$\frac{2x^6}{3}+C$	2	$\frac{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}{\mathbf{n}\,x}$	2	$\frac{\mathbf{n}\,x\sqrt[\mathbf{n}]{x}}{\mathbf{n}+1}+C$	2	$\frac{4}{5}(x+1)\sqrt[4]{x+1}+C$
3	$\frac{4}{3x^3}+C$	3	$-\frac{1}{\mathbf{n}\,x\sqrt[\mathbf{n}]{x}}$	3	$\frac{1}{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}\cdot x\cdot\frac{\mathbf{n}}{1-\mathbf{n}}+C$	3	$\frac{5}{7}(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2}+C$
4	$-\frac{5}{4x^4}+C$	4	$\frac{\mathbf{k}\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}{\mathbf{n}\,x}$	4	$\frac{\mathbf{n}\,x\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}{\mathbf{n}+\mathbf{k}}+C$	4	$\frac{5}{8}\left(x-\sqrt{2}\right)\sqrt[5]{\left(x-\sqrt{2}\right)^3}+C$
5	$\frac{5}{3x^3}+C$	5	$-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}\,x\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}}}}$	5	$-\frac{\mathbf{k}\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}}}{\mathbf{n}-\mathbf{k}}+C$	5	$\frac{4}{9}(x-1)^2(x-1)^{\frac{1}{4}}+C$

Тренажер

С. 28, № 1		С. 28, № 2		С. 29, № 4	
1	$\frac{x^3}{3}+x^2+2x+C$	1	$\frac{(x+1)^3}{3}+x+C$	1	$\frac{x^6}{6}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}-\frac{x^2}{10}+C$
2	$\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+x+C$	2	$\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$	2	$x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C$
3	$\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{5x^2}{2}+x+C$	3	$\frac{(x+1)^4}{4}+x^2+C$	3	$\frac{x}{3}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+C$
4	$\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{3x^2}{2}+2x+C$	4	$\frac{(x-1)^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x+C$	4	$6\sqrt[3]{x}-\frac{3x}{2}+\frac{4}{5}x\sqrt{x^3}+C$
5	$\frac{x^4}{4}+x^3+2x^2+x+C$	5	$\frac{(x+1)^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C$	5	$-\frac{4}{\sqrt{x}}+x^2\sqrt{x}+C$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Тренажер

С. 31, № 4		С. 31, № 5		С. 33, № 1		С. 33, № 2	
1	$\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$	1	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-2x+C$	1	$1+\frac{1}{x+1}$	1	$-\frac{1}{(x+1)^2}$
2	$x+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+C$	2	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+\sqrt{2}x+C$	2	$1-\frac{1}{x}$	2	$\frac{1}{x^2}$
3	$-\frac{1}{x}-2\ln\lvert x\rvert+x+C$	3	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+x+C$	3	$1-\frac{3}{x+2}$	3	$\frac{3}{(x+2)^2}$
4	$\frac{x^2}{2}+2x+\ln\lvert x\rvert+C$	4	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-x+C$	4	$-1+\frac{2}{x+1}$	4	$-\frac{2}{(x+1)^2}$
5	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$	5	$\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$	5	$-1-\frac{4}{x-2}$	5	$\frac{4}{(x-2)^2}$

Тренажер

С. 33, № 3		С. 37, № 4		С. 37, № 5	
1	$x+\ln\lvert x+1\rvert+C$	1	$\frac{1}{3}\left[\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}\right]$	1	$\frac{1}{3}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+2}\right\rvert+C$
2	$x-\ln\lvert x\rvert+C$	2	$-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$	2	$\frac{2}{3}\ln\left\lvert\frac{2x+1}{2(1-x)}\right\rvert+C$
3	$x-3\ln\lvert x+2\rvert+C$	3	$\frac{1}{2}\left[\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x}\right]$	3	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-2}{x}\right\rvert+C$
4	$-x+2\ln\lvert x+1\rvert+C$	4	$\int\frac{dx}{x-\frac{1}{2}}-\int\frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$	4	$\ln\left\lvert\frac{2x-1}{2x+1}\right\rvert+C$
5	$-x-4\ln\lvert x-2\rvert+C$	5	$-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-\frac{1}{2}}$	5	$\ln\left\lvert\frac{2x-1}{2x}\right\rvert+C$

ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Матрица С. 24, № 2

x^2	3	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{x^3}{3}$
x^{-2}	-1	$\frac{1}{-1}x^{-1}$	$-\frac{1}{x}$
$x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$x^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}$	$2\sqrt{x}$
$x^{-\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{1}x^{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

Серия

С. 23, № 5	С. 25, № 7
1 $\frac{2(x+1)^3}{3}+C$	1 $x+C$
2 $-\frac{\cos(x+1)}{2}+C$	2 $\frac{x^2}{2}+C$
3 $\frac{1}{4}\ln\left\|x-\frac{1}{2}\right\|+C$	3 $6\ln\|x\|+C$
4 $-\sqrt{e}\ln\|\cos(x-1)\|+C$	4 $\frac{1}{4}\ln\|x\|+C$
5 $\frac{2}{\pi}\mathrm{tg}\left(x-\sqrt{\pi}\right)+C$	5 $\frac{4(x+2)^5}{5}+C$

Серия

С. 27, № 7	С. 29, № 5	С. 33, № 4
1 $\frac{4x\sqrt{x}}{3}+C$	1 $\frac{2^x}{\ln 2}+e^x+C$	1 $2x+3\ln\|x-2\|+C$
2 $\frac{2\sqrt{2}\,x\sqrt{x}}{3}+C$	2 $\frac{x^2}{2}-\sin(x-2)+C$	2 $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\ln\left\|x+\frac{1}{2}\right\|+C$
3 $\frac{2\sqrt[4]{2}\,x\sqrt{x}}{3}+C$	3 $\frac{e^{2+x}}{2}+\frac{x}{e^2}+C$	3 $\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}\ln\left\|x-\frac{3}{2}\right\|+C$
4 $\frac{4\sqrt[4]{2}\,x\sqrt[4]{x}}{5}+C$	4 $\mathrm{tg}(x-2)+\mathrm{ctg}(x+2)+C$	4 $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln\left\|x-\frac{1}{2}\right\|+C$
5 $\frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7\sqrt[4]{2}}+C$	5 $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}+x\right)+\ln\|\cos(x-1)\|-\mathrm{ctg}(x-2)+C$	5 $-\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}\ln\left\|x-\frac{2}{3}\right\|+C$

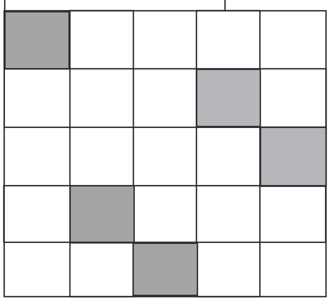
ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Серия

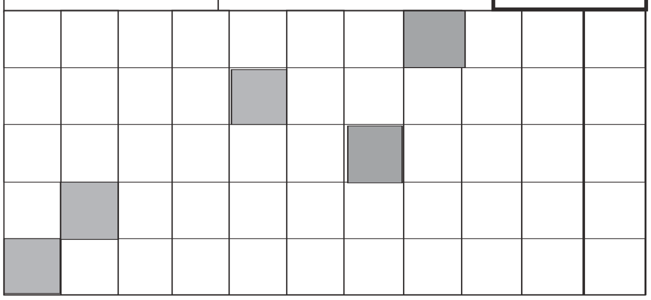
	С. 35, № 2	С. 37, № 3	С. 39, № 2
1	$\ln\left\|x^2-3x+2\right\|+C$	$\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x+2)}$	$\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{x-2}{x+1}\right\|+C$
2	$\ln\left\|\frac{x+2}{x+3}\right\|+C$	$\frac{2}{3(1-x)}+\frac{2}{3\left(x+\frac{1}{2}\right)}$	$\frac{2}{3}\ln\left\|\frac{x-2}{x+1}\right\|+C$
3	$\ln\left(x^2+3x+2\right)^2+C$	$-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x-2)}$	$\frac{1}{3}\ln(x+1)^2(x-2)^4+C$
4	$\ln\frac{\left\|x-3\right\|^3}{(x-2)^2}+C$	$\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{3}\ln(x-1)^2(x+2)^4+C$
5	$\ln\left\|6x^2+5x+1\right\|+C$	$-\frac{1}{x}+\frac{2}{2x-1}$	$-\frac{1}{4}\ln\left\|x-2\right\|\left\|x+2\right\|^3+C$

С. 35, №1



С. 39, №1

Тест



ОТВЕТЫ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Задачи на доказательство

С. 23, № 1

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x\pm\mathbf{p}\right)}{\sqrt{x\pm\mathbf{p}}}=$$

С. 23, № 2

$$=\int\left(x+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{A}}\right)d\left(x+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{A}}\right)=$$

С. 23, № 3

$$=\int\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}\,x}\,dx=$$

С. 24, № 1

$$=\int x^{\frac{1}{\mathbf{n}}}\,x^{\frac{1}{\mathbf{m}}}\,dx=$$

С. 24. № 3

$$=\int\left(x\pm\mathbf{p}\right)^{-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}}d\left(x\pm\mathbf{p}\right)=$$

С. 25, № 4

$$=\mathbf{n}^{\frac{1}{\mathbf{n}}}\int x^{\frac{1}{\mathbf{n}}}\,dx=$$

С. 25, № 5

$$=\frac{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{A}^{\mathbf{n}-1}}}{\sqrt[\mathbf{m}]{\mathbf{B}^{\mathbf{m}-1}}}\int\frac{\sqrt[\mathbf{n}]{x}}{\sqrt[\mathbf{m}]{x}}\,dx=$$

С. 25, № 6

$$=\int\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{n}+1}}\,dx=$$

С. 26, № 3

$$=\frac{1}{(1-\mathbf{n})}\left[\frac{1}{x^{\mathbf{n}-1}}\right]'+\mathbf{n}\int\frac{dx}{x^{\mathbf{n}+1}}=$$

С. 27, № 4

$$=\int\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{n}+\mathbf{p}}}\,dx=$$

С. 27, № 5

$$=\int\sqrt[\mathbf{n}]{x^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{p}}}\,dx=$$

С. 29, № 3

$$=\left(\mathbf{e}^{x}\right)'+\frac{1}{\ln\mathbf{a}}\left(\mathbf{a}^{x}\right)'=$$

С. 30, № 1

$$=\int\left(x^{3}+\frac{1}{x^{3}}\right)dx=$$

С. 30, № 2

$$=\int\left(x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=$$

С. 30, № 3

$$=\int\left[\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)^{2}-x^{2}\right]dx=$$

С. 36, № 1

$$\frac{1}{\mathbf{k}}\cdot\underbrace{\frac{1}{x+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{k}}}}$$

С. 36, № 2

$$=\frac{1}{\mathbf{k}}\cdot\int\frac{d\left(x+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{k}}\right)}{x+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{k}}}=$$

Резник Н.А. Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум. Вып. I. Начальные представления о технике интегрирования. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 80 с

1 ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ С ПАРАМЕТРАМИ

$$y = \overbrace{\mathbf{A}}^{\text{параметр}} \cdot f\,(\overbrace{\mathbf{k}\cdot x + \mathbf{p}}^{\text{линейный аргумент}}) + \overbrace{\mathbf{B}}^{\text{параметр}}$$

$$y = \underbrace{\mathbf{A}}_{\text{параметр функции}} \cdot f\,(\underbrace{\mathbf{k}}\cdot * + \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{параметры линейного аргумента}}) + \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{параметр функции}}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$\int[\mathbf{A}\cdot f\,(\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p}) + \mathbf{B}\,]\,dx =$$

$$= \mathbf{A}\cdot\int f\,(\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p})\,d\,x + \mathbf{B}\int dx =$$

$$= \mathbf{A}\cdot\int f\,(\underset{?}{\mathbf{k}}\cdot x+\mathbf{p})\,d(x+\mathbf{p}) + \mathbf{B}\,x = \mathbf{?}$$

Преобразуйте функцию к виду $y = \mathbf{A}\cdot f\,(\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p}) + \mathbf{B}$

1 Тренажер

1	$y = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\,x}$
2	$y = \dfrac{x}{\mathbf{2}} + \mathbf{3}$
3	$y = \dfrac{\mathbf{3}}{x} + \mathbf{2}$
4	$y = \dfrac{\mathbf{2}\,x + \mathbf{3}}{x}$
5	$y = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}\,x + \mathbf{2}} + \mathbf{1}$

2 Тренажер

1	$y = \mathbf{2}\cos(\mathbf{1} + \mathbf{3}x)$
2	$y = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\cos(\mathbf{1} - \mathbf{3}x)}$
3	$y = \dfrac{\cos\mathbf{3}x + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
4	$y = \dfrac{\mathbf{3}\cos(x + \mathbf{2}) - \mathbf{1}}{\mathbf{3}}$
5	$y = \cos[\mathbf{2}(x - \mathbf{3})]$

3 Тренажер

1	$y = \sqrt{\mathbf{7}x}$
2	$y = \sqrt{\mathbf{7}x + \mathbf{7}}$
3	$y = \dfrac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{7}x}}$
4	$y = \dfrac{\sqrt{\mathbf{7}x}}{\mathbf{7}}$
5	$y = \dfrac{\mathbf{7} + \sqrt{x + \mathbf{7}}}{\sqrt{\mathbf{7}}}$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия **4** Для функции	постройте функцию с параметрами	при $\mathbf{A=3\pi}$, $\mathbf{B=-3}$, $\mathbf{k=\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $\mathbf{p=\ln 3}$
1 $f(x)=x$	$f(\mathbf{k}\cdot x)+\mathbf{B}$	
2 $f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbf{A}\cdot f(\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p})$	
3 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbf{A}\cdot f(x+\mathbf{p})+\mathbf{B}$	
4 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbf{A}\cdot f(\mathbf{k}\cdot x)+\mathbf{B}$	
5 $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$f(\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p})+\mathbf{B}$	

Серия **5**	Найдите интеграл
1	$\int [\sin x-\cos(x-1)]\,dx =$
2	$\int \left[e^{2x-1}-(2x)^{e}\right]d\,2x =$
3	$\int \left[\dfrac{\operatorname{tg}(x-3)}{3}-1\right]dx =$
4	$\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)dx =$
5	$\int \left(\dfrac{1}{\frac{\cos^2 x}{2}}-\dfrac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg} x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin^2 x}\right)dx =$

2

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

КОНСТРУИРОВАНИЕ ДРОБИ $\dfrac{R(x)}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})}$

$$\frac{1}{(x-\mathbf{a})}+\frac{1}{(x-\mathbf{b})}+\frac{1}{(x-\mathbf{c})}=$$

$$=\frac{(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})+(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{c})+(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})}=$$

$$=\frac{\left(x^2-\mathbf{b}x-\mathbf{c}x-\mathbf{bc}\right)+\left(x^2-\mathbf{a}x-\mathbf{c}x-\mathbf{ac}\right)+\left(x^2-\mathbf{a}x-\mathbf{b}x-\mathbf{ab}\right)}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})}=$$

$$=\frac{\overbrace{3x^2-2(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})x-(\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{bc})}^{R(x)}}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})}=$$

$$=\frac{R(x)}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ $\dfrac{\mathbf{k}x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})}$

Коэффициенты **A, B** *и* **C** *находятся* **методом подстановки**

$$\frac{\mathbf{k}x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{p}}{\underbrace{(x-\mathbf{a})}_{I}\underbrace{(x-\mathbf{b})}_{II}\underbrace{(x-\mathbf{c})}_{III}}=\frac{\mathbf{A}}{\underbrace{x-\mathbf{a}}_{I}}+\frac{\mathbf{B}}{\underbrace{x-\mathbf{b}}_{II}}+\frac{\mathbf{C}}{\underbrace{x-\mathbf{c}}_{III}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{\mathbf{k}x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})}dx=\mathbf{A}\cdot\int\frac{dx}{x-\mathbf{a}}+\mathbf{B}\cdot\int\frac{dx}{x-\mathbf{b}}+\mathbf{C}\cdot\int\frac{dx}{x-\mathbf{c}}=$$

$$=\mathbf{A}\cdot\mathbf{ln}|x-\mathbf{a}|+\mathbf{B}\cdot\mathbf{ln}|x-\mathbf{b}|+\mathbf{C}\cdot\mathbf{ln}|x-\mathbf{c}|+C$$

$$=\mathbf{ln}\left(|x-\mathbf{a}|^{\mathbf{A}}\cdot|x-\mathbf{b}|^{\mathbf{B}}\cdot|x-\mathbf{c}|^{\mathbf{C}}\right)+C$$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ПРИМЕР

$$\frac{5-x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\Downarrow$$

$$5-x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$x=1$	$\Rightarrow$	$5-1 = A(1-2)(1-3)$	$\Rightarrow$	$A=2$
$x=2$	$\Rightarrow$	$5-2 = B(2-1)(2-3)$	$\Rightarrow$	$B=-3$
$x=3$	$\Rightarrow$	$5-3 = C(3-1)(3-2)$	$\Rightarrow$	$C=1$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{(5-x)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 2\cdot\int\frac{dx}{x-1} - 3\cdot\int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dx}{x-3} =$$

$$= 2\cdot\ln|x-1| - 3\cdot\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

$$= \ln\frac{(x-1)^2|x-3|}{|x-2|^3} + C$$

МАТРИЦА **1**	Для каждой дроби			
РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ	определите количество простейших дробей, на которые ее можно разложить	представьте данную дробь в виде суммы простейших дробей	определите числовой коэффициент каждой простейшей дроби	найдите интеграл
$\frac{2x}{x^2-1}$				
$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$				
$\frac{6x^2-3x+1}{x(x-1)(x+1)}$				
$\frac{3x^2-2x-4}{(x^2-4)(x-1)}$				
$\frac{x^2-4x+4}{(x-1)(4-x^2)}$				

3 ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ $\dfrac{\mathbf{k_1}x^{\mathbf{n-1}}+\mathbf{k_2}x^{\mathbf{n-2}}+\ldots+\mathbf{k_{n-1}}x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a_1})(x-\mathbf{a_2})\cdot\ldots\cdot(x-\mathbf{a_n})}$

$$\frac{\mathbf{k_1}x^{\mathbf{n-1}}+\mathbf{k_2}x^{\mathbf{n-2}}+\ldots+\mathbf{k_{n-1}}x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a_1})(x-\mathbf{a_2})\cdot\ldots\cdot(x-\mathbf{a_n})}$$

Каждой простейшей дроби соответствует свой числовой коэффициент

$$=\frac{\mathbf{A_1}}{(x-\mathbf{a_1})}+\frac{\mathbf{A_2}}{(x-\mathbf{a_2})}+\ldots+\frac{\mathbf{A_{n-1}}}{(x-\mathbf{a_{n-1}})}+\frac{\mathbf{A_n}}{(x-\mathbf{a_n})}$$

Числовые коэффициенты простейших дробей находятся **методом подстановки**

Количество множителей знаменателя заданной дроби равно количеству простейших дробей I типа

Серия **1** Разложите дробь на простейшие

1 $\dfrac{\mathbf{2}x-\mathbf{1}}{(x-\mathbf{1})(x+\mathbf{1})}$

2 $\dfrac{\mathbf{2}x-\mathbf{1}}{x(x+\mathbf{1})(x+\mathbf{2})}$

3 $\dfrac{\mathbf{2}x-\mathbf{1}}{x^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}}$

4 $\dfrac{\mathbf{2}x-\mathbf{1}}{(x^{\mathbf{2}}-\mathbf{4})(x+\mathbf{1})}$

5 $\dfrac{\mathbf{2}x-\mathbf{1}}{x^{\mathbf{3}}-\mathbf{6}x^{\mathbf{2}}+\mathbf{11}x-\mathbf{6}}$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

МАТРИЦА **2**	Для каждой дроби			
РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ	представьте данную дробь в виде суммы простейших дробей	определите числовой коэффициент каждой простейшей дроби	найдите производную и упростите	найдите первообразную и упростите
$\dfrac{5x-2}{x(x-1)}$				
$\dfrac{3x-2}{x(x-2)}$				
$\dfrac{x+3}{x^2-1}$				
$\dfrac{1+7x}{x(2-x)(x+1)}$				
$\dfrac{x^2-2x-2}{x\left(x^2-x-2\right)}$				

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

СХЕМА ВЫДЕЛЕНИЯ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ДРОБИ

Если у дроби степень числителя **больше** или **равна** степени знаменателя

$$R = \frac{\mathbf{k_1} x^{\mathbf{n+s}} + \ \dots \ + \mathbf{k}}{\mathbf{p_1} x^{\mathbf{n}} + \ \dots \ + \mathbf{p}}$$

то выделение целой части дроби можно осуществлять «делением уголком»

Числитель | Знаменатель

Уголок для вычислений

Запись целой части дроби

Остаток

не делится на знаменатель

$$R = \boxed{\textit{целая часть}} + \boxed{\frac{\textit{остаток}}{\textit{знаменатель}}}$$

ПРИМЕР

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{\left(x^2 - 1\right)(x - 2)} dx = \mathbf{?}$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{\left(x^2 - 1\right)(x - 2)} =$$

для удобства вычислений в числителе учитываются все степени переменной x с соответствующими коэффициентами

$$= \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
\underline{-\ x^4 - 2x^3 - \ x^2 + 2x} & \overline{\ x + 2\ } \\
2x^3 - \ x^2 - 2x + 1 & \\
\underline{-\ 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4} & \\
3x^2 \qquad\quad -3 &
\end{array}$$

$$I = \underbrace{\int (x + 2)\, dx}_{\textit{непосредственное применение таблицы}} + \underbrace{3 \int \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx}_{\textit{разложение подынтегральной дроби на простейшие}}$$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

МАТРИЦА 1	Для каждой дроби				
РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ	запишите		разложите знаменатель остатка на множители	разложите остаток на простейшие дроби	найдите интеграл
	целую часть	остаток			
$\frac{x^2-3x+7}{x^2-3x+2}$					
$\frac{x^2-4x+2}{x^2-7x+12}$					
$\frac{2x^2-3x-7}{x^2+x-6}$					
$\frac{3x-2x^3-9x^2+1}{x^2+6x+8}$					
$\frac{x^3+8x^2+11x+38}{x^3+8x^2+19x+12}$					

5 ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}} \cdot d(\mathbf{k}x) = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}} \cdot d(x) = d(x)$$

$$\Downarrow$$

$$d(x) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}} \cdot d(\mathbf{k}x)$$

$$f(x),\ F(x):\ F'(x) = f(x)\ \forall x \in \langle a; b\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\int \underbrace{f(\mathbf{k}x)}_{\text{трудно для преобразования}} dx = \int f(\mathbf{k}x) \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}} \cdot d(\mathbf{k}x)}_{\text{элементарные преобразования}} =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}} \int f(\mathbf{k}x)\ d(\mathbf{k}x) =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\ F(\mathbf{k}x) + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\boxed{2}x}} = \overbrace{\underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{\textbf{1-й способ}}}^{\text{Вынесение числа за знак интеграла}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 2\sqrt{x} + C = \sqrt{2x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \overbrace{\underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d\,2x}{\sqrt{2x}}}_{\text{Корректировка переменной интегрирования}}}^{\textbf{2-й способ}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2x} + C = \sqrt{2x} + C$$

ПРИМЕР

Осуществите в исходном задании коорректировку переменной интегрирования и найдите интеграл $I = \int \frac{dx}{\sin\sqrt{5}x}$

Анализ

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\sqrt{5}x}{\sin\sqrt{5}x}$$

Решение

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{5}x}{2}\right| + C$$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1 Тренажер

Восстановите переменную интегрирования	
1	$\int \cos 2x\, d\square = \sin 2x + C$
2	$\int \mathrm{ctg}(-3x)\, d\square = -\ln\lvert\sin 3x\rvert + C$
3	$\int \sin\frac{1}{4}x\, d\square = -\cos\frac{x}{4} + C$
4	$\int \frac{1}{\cos^2 5x}\, d\square = \mathrm{tg}\,5x + C$
5	$\int \frac{d\square}{\mathrm{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right)} = \ln\left\lvert\cos\frac{x}{2}\right\rvert + C$

2 Тренажер

Мысленно измените в исходном задании переменную интегрирования, введите соответствующий множитель и найдите интеграл	
1	$\int 2\cdot\mathrm{tg}\,x\,dx$
2	$\int \mathrm{ctg}\,2x\,dx$
3	$\int (-2\,\mathrm{ctg}\,2x)\,dx$
4	$\int \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,2x\,dx$
5	$2\int \mathrm{ctg}\left(-\frac{1}{2}x\right)dx$

Тест **3** Найдите интеграл	$\frac{e^x}{2}+C$	$2e^x+C$	$e^{2x}+C$	$\frac{e^{2x}}{2}+C$	$\frac{e^2e^{2x}}{2}+C$	$2e^{2x}+C$	$e^{4x}+C$	e^2+C	e^2x+C
$2\int e^x\,dx$									
$\int e^{2x}\,dx$									
$2\int e^{2x}\,dx$									
$\int e^2\,dx$									
$\int e^{2x+2}\,dx$									

6

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Триногометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$\cos(-x) = \\ = \cos x$$

$$\sin(-x) = \\ = -\sin x$$

ПРИМЕР

$$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \boxed{\int d} x =$$

мысленное преобразование

$$= \mathrm{tg}\, x - x + C$$

ПРИМЕР

$$\int \cos^2(-3x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos^2 3x\, d\, 3x =$$

мысленное преобразование

$$= \frac{1}{3 \cdot 2} \int 2\cos^2 3x\, d\, 3x =$$

$$= \frac{1}{6} \int \left[1 + \cos(2 \cdot 3x) \right] d\, 3x =$$

мысленное преобразование

$$= \frac{1}{6} \left(\boxed{\int d}\, 3x + \int \cos 6x\, d\, 3x \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left[3x + \frac{1}{2} \int \cos 6x\, d(2 \cdot 3x) \right] =$$

мысленное преобразование

$$= \frac{1}{6} \left[3x + \frac{1}{2} \sin 6x \right] + C$$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1 Тренажер

	Найдите интеграл
1	$\int\left(\mathbf{tg}^2 x-\mathbf{1}\right)dx=$
2	$\int\left(\mathbf{ctg}^2\,\mathbf{2}x+\mathbf{1}\right)dx=$
3	$\int \mathbf{sin}\frac{x}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{cos}\frac{x}{\mathbf{2}}\,dx=$
4	$\int\left(\mathbf{tg}\,\frac{x}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{ctg}\,\frac{x}{\mathbf{3}}-\mathbf{tg}^2\,\frac{x}{\mathbf{3}}\right)dx=$
5	$\int\left[\mathbf{1}-\mathbf{tg}\,x\right]^2 dx=$

Серия **2**	Найдите интеграл
1	$\int\left(\mathbf{sin}\,x\cdot\mathbf{cos}\,x\right)dx$
2	$\int\frac{\mathbf{2}-\mathbf{sin}\,\mathbf{2}x}{\mathbf{sin}^2 x+\mathbf{cos}^2 x}\,dx$
3	$\int\frac{dx}{\mathbf{cos}\,\mathbf{2}x-\mathbf{cos}^2 x}$
4	$\int\frac{\mathbf{sin}^2 x\cdot\mathbf{cos}^2 x}{\mathbf{cos}^2\,\mathbf{2}x}\,dx$
5	$\int\frac{\mathbf{3}-\mathbf{ctg}^2 x}{\mathbf{cos}^2 x}\,dx$

7 ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$\mathbf{k},\ \mathbf{p} \neq 0$

$$F(x): F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \langle a; b\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,dx = \int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\cdot\frac{1}{\mathbf{k}}\cdot d(\mathbf{k}x) = \boxed{\begin{array}{l} d(\mathbf{k}x) = \\ = d(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) \end{array}}$$

$$= \frac{1}{\mathbf{k}}\cdot\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,d(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{k}}\cdot F(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{4\,dx}{\sqrt{2x-7}} = ?$$

Анализ

$$\frac{\overbrace{4}^{\text{Числовой множитель подынтегральной функции}}}{\sqrt{\underbrace{2}\cdot x - \underbrace{7}}}$$

Параметры аргумента подынтегральной функции

Решение

$$\int \frac{4}{\sqrt{2\cdot x-7}}\,dx =$$

$$= \frac{4}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2x-7}}\,d(2x-7) =$$

$$= 4\sqrt{2x-7} + C$$

Серия 1	Найдите интеграл
1	$\int \frac{1}{(2-x)^2}\,dx =$
2	$\int \frac{1}{(x-3)^3}\,dx =$
3	$\int \frac{3}{(5x-4)^4}\,dx =$
4	$\int \frac{6}{(7-6x)^5}\,dx =$

Серия 2	Найдите интеграл
1	$\int 2x\,dx =$
2	$\int 2\alpha\, d\frac{\alpha}{2} =$
3	$\int \frac{5t}{3}\, d\frac{t}{3} =$
4	$\int \frac{3\theta}{2}\, d\frac{2\theta}{3} =$
5	$\int \frac{y-2}{7}\, d\frac{y}{7} =$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

3 Тренажер

	Осуществите корректировку переменной интегрирования и найдите интеграл
1	$\int (2x+1)\,dx$
2	$\int \dfrac{dx}{2x-1}$
3	$\int \left(\dfrac{x}{3}-3\right)^2 dx$
4	$\int \dfrac{dx}{\left(\sqrt{2}x+2\right)^4}$
5	$\int 5\sqrt{5-\dfrac{x}{5}}\,dx$

4 Тренажер

	Запишите результат, мысленно осуществив корректировку переменной интегрирования
1	$\int \mathrm{ctg}\,2x\,dx$
2	$\int \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\,dx$
3	$\int \dfrac{dx}{\sin^2(x-2)}$
4	$\int \dfrac{dx}{\cos^2\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)}$
5	$\int \mathrm{ctg}\left(2-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)dx$

Тест 5. Найдите первообразную для подынтегральной функции	2^{x+2}	$2x^2$	$x\ln 2$	$\ln x$	$\ln 2$	4^x	x^2	$\dfrac{2^{2x}}{\ln 2}$
$\int 2^{2x+1}\,dx$								
$\int 2^{x+2}\ln 2\,dx$								
$\int 2x\,dx$								
$\int 2x\,d2x$								
$\int 4^x \ln 2\,d2x$								

8 ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

АЛГОРИТМ КОРРЕКТИРОВКИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,dx =$	$\int (\mathbf{2}x+\mathbf{1})^{2}\,dx =$

Преобразование дифференциала

$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\cdot\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,d(\,\mathbf{k}\cdot x\,)=$	$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\int (\mathbf{2}x+\mathbf{1})^{2}d(\,\mathbf{2}x\,)\ =$

Добавление свободного члена к переменной интегрирования

$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\cdot\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,d(\mathbf{k}x+\mathbf{p})=$	$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\int (\mathbf{2}x+\mathbf{1})^{2}d(\,\mathbf{2}x+\mathbf{1}\,)=$

Нахождение результата по таблице

$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\cdot F(\mathbf{k}x+\mathbf{p})+C$	$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\dfrac{(\mathbf{2}x+\mathbf{1})^{3}}{\mathbf{3}}+C=$ $=\dfrac{(\mathbf{2}x+\mathbf{1})^{3}}{\mathbf{6}}+C$

ОБЩАЯ СХЕМА КОРРЕКТИРОВКИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,d(x)=$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\cdot F(\mathbf{k}x+\mathbf{p})+\mathbf{C}$$

Серия **1**	Восстановите подынтегральную функцию
1	$\int(\quad ?\quad)\,d\,x = -\mathbf{cos}\,x + C = \int(\qquad\qquad)\,d\,x$
2	$\int(\quad ?\quad)\,d\,\mathbf{2}x = -\mathbf{ctg}\,\mathbf{2}x + C = \int(\qquad\qquad)\,d\,\mathbf{2}x$
3	$\int(\quad ?\quad)\,d(\mathbf{3}x+\mathbf{1}) = \dfrac{(\mathbf{3}x+\mathbf{1})^{2}}{\mathbf{2}} + C = \int(\qquad\qquad)\,d(\mathbf{3}x+\mathbf{1})$
4	$\int(\quad ?\quad)\,d\left(\dfrac{x}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{tg}\,\dfrac{x}{\mathbf{2}} + C = \int(\qquad\qquad)\,d\left(\dfrac{x}{\mathbf{2}}\right)$
5	$\int(\quad ?\quad)\,d(\mathbf{1}-\mathbf{2}x) = \mathbf{cos}(\mathbf{1}-\mathbf{2}x) + C = \int(\qquad\qquad)\,d(\mathbf{1}-\mathbf{2}x)$

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия **2** Найдите интеграл

1 $$\int\left(e^{x}-\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{x}}{e^{2x}}\right)dx=$$

2 $$\int\left[(\sin 2x\cdot\cos 2x)^{2}+\frac{\cos^{2}2x}{4}\right]dx=$$

3 $$\int\left(\frac{\operatorname{ctg}^{2}3x}{3}-1\right)dx=$$

4 $$\int\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)dx=$$

5 $$\int\left[\frac{1}{\cos^{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(1-\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)}\right]dx=$$

Информационная схема
«ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ»

$$y = \underbrace{\mathbf{A}}_{\text{параметр функции}} \cdot f\,(\underbrace{\mathbf{k}}\cdot * + \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{параметры линейного аргумента}}) + \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{параметр функции}}$$

параметр функции ***параметры линейного аргумента*** ***параметр функции***

КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f\left(x+\mathbf{p}\right)dx = \int f\left(x+\mathbf{p}\right)d\left(x+\mathbf{p}\right)$$

$$\int f\left(\mathbf{k}x\right)dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\int f\left(\mathbf{k}x\right)d\left(\mathbf{k}x\right)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМ АРГУМЕНТОМ

$$\int f\left(\mathbf{k}x+\mathbf{p}\right)dx = \frac{\int f\left(\mathbf{k}x+\mathbf{p}\right)d\left(\mathbf{k}x+\mathbf{p}\right)}{\mathbf{k}}$$

Выделяется целая часть дроби

$$R = \frac{\mathbf{k_1}x^{\mathbf{n+s}} + \ldots + \mathbf{k}}{\mathbf{p_1}x^{\mathbf{n}} + \ldots + \mathbf{p}}$$

Степень числителя меньше степени знаменателя

$$\int \frac{R(x)\,dx}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})} =$$

$$= \int \frac{\mathbf{A}dx}{x-\mathbf{a}} + \int \frac{\mathbf{B}dx}{x-\mathbf{b}} + \int \frac{\mathbf{C}dx}{x-\mathbf{c}}$$

A, **B**, **C** *находятся* **методом подстановки**

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $\int \frac{\cos(3x+2)}{6}\,dx$
2. $\int \left(\frac{\sqrt{ex}-\sqrt{e^3}}{\sqrt{e}}\right)^2 dx$
3. $\int \left(\sin^2\frac{3x}{2}-1\right)dx$
4. $\int \frac{\sin 2x}{2\sin^2 x}\,dx$
5. $\int \frac{2\,dx}{x^2-1}$
6. $\int \frac{3x-1}{6x-1}\,dx$
7. $\int \left(\frac{2}{\operatorname{tg}(2x+1)}+\frac{3}{\operatorname{ctg}(3x-1)}\right)dx$

Вариант 2

1. $\int \frac{x^4-x^{-4}+2}{x^2}\,dx$
2. $\int \sin^4\frac{x}{4}\,dx$
3. $\int \frac{\sqrt{7x}-1}{\sqrt{7\pi x}}\,dx$
4. $\int \frac{2x-3x^2-1}{(x+1)(x-2)}\,dx$
5. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}}+2\sqrt{\frac{1-2x}{2}}\right)dx$
6. $\int \frac{3\cos^2 3x\,dx}{\sin^2(-3x)}$
7. $\int \frac{2x^2-5}{2(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

Вариант 3

1. $\int \left[\sin^2(1-x)-\operatorname{ctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right]dx$
2. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$
3. $\int \operatorname{ctg}^3\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$
4. $\int \frac{e^x+3}{e^{2x}-4e^x+3}\,de^x$
5. $\int \cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\,dx$
6. $\int \sqrt{\frac{\sqrt[4]{2x-1}}{2}}\,dx$
7. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx$

ОТВЕТЫ

Тренажер

С. 48, № 1		С. 48, № 2	
1	$y=1\cdot\frac{1}{2\cdot x+0}+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot x+0}+0$	1	$y=2\cdot\cos(3\cdot x+1)+0$
2	$y=1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+0\right)+3$	2	$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos(-3\cdot x+1)}+0$
3	$y=3\cdot\frac{1}{1\cdot x+0}+2=1\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot x+0}+2$	3	$y=\frac{1}{2}\cdot\cos(3\cdot x-0)+\frac{1}{2}$
4	$y=3\cdot\frac{1}{1\cdot x+0}+2=1\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot x+0}+2$	4	$y=1\cdot\cos(1\cdot x+2)-\frac{1}{3}$
5	$y=2\cdot\frac{1}{3\cdot x+2}+1=1\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot x+1}+2$	5	$y=1\cdot\cos(2\cdot x-6)+0$

Тренажер

С. 48, № 3		С. 57, № 1		С. 57, № 2	
1	$y=\sqrt{7}\cdot\sqrt{1\cdot x+0}+0=1\cdot\sqrt{7\cdot x+0}+0$	1	$2x$	1	$-2\ln\lvert\cos x\rvert+C$
2	$y=1\cdot\sqrt{7\cdot x+7}+0=\sqrt{7}\cdot\sqrt{1\cdot x+1}+0$	2	$3x$	2	$\frac{\ln\lvert\sin 2x\rvert}{2}+C$
3	$y=7\cdot\frac{1}{\sqrt{7\cdot x+0}}+0=\sqrt{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{1\cdot x+0}}+0$	3	$\frac{x}{4}$	3	$-\ln\lvert\sin 2x\rvert+C$
4	$y=\frac{1}{7}\cdot\sqrt{7\cdot x+0}+0=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{1\cdot x+0}+0$	4	$5x$	4	$-\frac{\ln\lvert\cos 2x\rvert}{4}+C$
5	$y=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{1\cdot x+7}+\sqrt{7}$	5	$\frac{x}{2}$	5	$-4\ln\left\lvert\sin\frac{x}{2}\right\rvert+C$

ОТВЕТЫ

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Тренажер

С. 59, № 1		С. 61, № 3		С. 61, № 4	
1	$\mathrm{tg}\,x-2x+c$	1	$\dfrac{(2x+1)^2}{4}+C$	1	$\dfrac{1}{2}\ln\lvert\sin 2x\rvert+C$
2	$-\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\,2x+C$	2	$\dfrac{\ln\lvert 2x-1\rvert}{2}+C$	2	$-2\ln\left\lvert\cos\dfrac{x}{2}\right\rvert+C$
3	$-\dfrac{1}{2}\cos x+C$	3	$\left(\dfrac{x}{3}-3\right)^3+C$	3	$-\mathrm{ctg}(x-2)+C$
4	$2x-3\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}+C$	4	$-\dfrac{1}{3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x+2\right)^3}+C$	4	$\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)+C$
5	$2\ln\lvert\cos x\rvert+\mathrm{tg}\,x+C$	5	$-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(25-x)\sqrt{25-x}+C$	5	$-\sqrt{2}\ln\left\lvert\sin\left(2-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right\rvert+C$

Матрица

С. 51, № 1

2	$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$	$A=1$ $B=1$	$\ln\lvert x^2-1\rvert+C$
2	$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$	$A=2$ $B=-1$	$\ln\dfrac{(x-1)^2}{\lvert x-2\rvert}+C$
3	$\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$	$A=-1$ $B=2$ $C=5$	$\ln\dfrac{(x-1)^2\lvert x+1\rvert^5}{\lvert x\rvert}+C$
3	$\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-1}$	$A=1$ $B=1$ $C=1$	$\ln\lvert(x-1)(x^2-4)\rvert+C$
2	$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$	$A=\dfrac{1}{3}$ $B=-\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\lvert x-1\rvert}{(x+2)^4}+C$

ОТВЕТЫ

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия

	С. 49, № 4		С. 49, № 5
1	$\frac{x}{\sqrt{3}}-3$	1	$-\cos x-\sin(x-1)+C$
2	$\frac{3\sqrt{3}\pi}{x+\sqrt{3}\ln 3}$	2	$e^{2x-1}-\frac{(2x)^{e+1}}{e+1}+C$
3	$3\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}+\ln 3}-1\right)$	3	$-\frac{\ln\lvert\cos(x-3)\rvert}{3}-x+C$
4	$\frac{3\pi}{x^2}-3$	4	$\sqrt{2x}+\frac{x\sqrt{2x}}{3}+C$
5	$\cos^2\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln 3\right)$	5	$2\,\mathrm{tg}\,x+\frac{\ln\lvert\cos x\rvert}{\sqrt{2}}-\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sqrt{2}}+C$

Серия

	С. 52, № 1		С. 59, № 2		С. 60, № 1
1	$\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x+1)}$	1	$-\frac{\cos 2x}{4}+C$	1	$\frac{1}{2-x}+C$
2	$-\frac{1}{2x}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{2(x+2)}$	2	$2x+\frac{\cos 2x}{4}+C$	2	$-\frac{1}{2(x-3)^2}+C$
3	$\frac{3}{4(x-2)}+\frac{5}{4(x+2)}$	3	$\mathrm{ctg}\,x+C$	3	$\frac{1}{5(4-5x)^3}+C$
4	$\frac{1}{4(x-2)}-\frac{5}{4(x+2)}+\frac{5}{x+1}$	4	$\frac{\mathrm{tg}^2 2x+2x}{8}+C$	4	$\frac{1}{4(7-6x)^4}+C$
5	$\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x-2}+\frac{5}{2(x-3)}$	5	$3\,\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x+C$		

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

ОТВЕТЫ

ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Матрица

С. 53, № 2

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$	A = 2 B = 3	$-\left[\frac{2}{x^2}+\frac{3}{(x-1)^2}\right]$	$\ln\left[x^2\lvert(x-1)^3\rvert\right]$
$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}$	A = 1 B = 2	$-\left[\frac{1}{x^2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right]$	$\ln\left[\lvert x\rvert(x-2)^2\right]$
$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$	A = 2 B = −1	$-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$	$\ln\frac{(x-1)^2}{\lvert x+1\rvert}$
[illegible]	[illegible] [illegible] C = 2	$\frac{5}{2(x-2)^2}-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{(x+1)^2}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{\lvert x\rvert(x+1)^4}{\lvert x-2\rvert^5}$
[illegible]	A = 1 [illegible] [illegible]	$-\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-2)^2}$	$\ln\left\lvert x\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}\right\rvert$

Матрица

С. 55. № 1

1	$\frac{5}{x^2-3x+2}$	$\frac{5}{(x-1)(x-2)}$	$-\frac{5}{x-1}+\frac{5}{x-2}$	$x+5\ln\left\lvert\frac{x-2}{x-1}\right\rvert+C$
1	$\frac{3x-10}{x^2-7x+12}$	$\frac{3x-10}{(x-3)(x-4)}$	$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}$	$x+\ln\left[\lvert x-3\rvert(x-4)^2\right]+C$
2	[illegible]	$\frac{-5x+5}{(x-2)(x+3)}$	$-\frac{4}{x+3}-\frac{1}{x-2}$	$2x-\ln(x+3)^4-\ln\lvert x-2\rvert+C$
$-2x+3$	$\frac{x-4}{x^2+6x+8}$	$\frac{x-4}{(x+2)(x+4)}$	$\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+2}$	$-x^2+3x+\ln\frac{(x+4)^4}{\lvert x+2\rvert^3}+C$
1	$\frac{26-8x}{x^3+8x^2+19x+12}$	$\frac{-8x+26}{(x+3)(x+4)(x+1)}$	$\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x+4}-\frac{3}{x+1}$	$x+\ln\frac{\lvert x+3\rvert(x+4)^2}{\lvert(x+1)^3\rvert}+C$

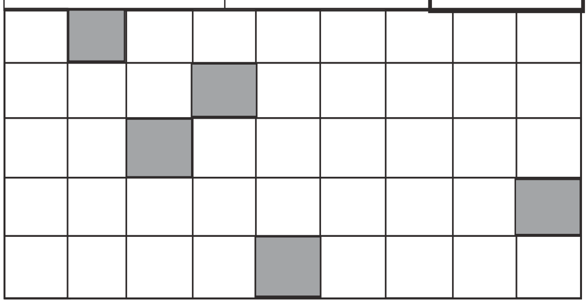
ОТВЕТЫ

Серия

С. 60, № 2	С. 62, № 1	С. 69, № 2
1 x^2+C	1 $\sin x$	1 $e^x-\frac{e^{2x}}{4}-e^{-x}+C$
2 $\frac{\alpha^2}{2}+C$	2 $\frac{1}{\sin^2 2x}$	2 $\frac{1}{4}x+C$
3 $\frac{5t^2}{18}+C$	3 $3x+1$	3 $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{9}-\frac{4x}{3}+C$
4 $\frac{\theta^2}{2}+C$	4 $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$	4 $\sqrt{2x-1}+\frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{3}\sqrt{x-1}+C$
5 $\frac{y^2}{98}-\frac{2y}{49}+C$	5 $-\sin(1-2x)$	5 $2\operatorname{tg}\left(1+\frac{x}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}\ln\left\lvert\cos\left(1-\sqrt{2}x\right)\right\rvert}{2}+C$

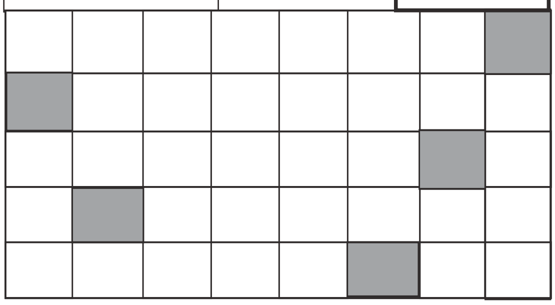
С. 57. №3

Тест



С. 61. №5

Тест



Зачет

1 Восстановите подынтегральную функцию

$$\int \qquad dx = x^3 \sqrt[3]{x} + C$$

2 Восстановите подынтегральную функцию

$$\int \left(\qquad \right) dx = \frac{1}{4x^4} + C$$

3 Запишите неопределенный интеграл как множество первообразных **4**

$$\int \left(\pi - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) dx \qquad \int \left[e^{(x - \ln 4)} - \ln 4 \cdot (e - x) \right] dx$$

5 По результату интегрирования $\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x+5}}{(x-5)^3} \right| + C$ восстановите подынтегральную функцию

Найдите интеграл

6 $$\int \left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}} + \frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2}} \right) dx$$

7 $$\int \frac{1 - \sin^2(1-x)}{\cos^2(x-1)} dx$$

8 $$\int \frac{d\cos\left(x + \sqrt{2}\right)}{\left[\cos\left(x + \sqrt{2}\right)\right]^2}$$

9 $$\int \frac{\ln 2\, dx}{(\ln 2 \cdot x + 2)}$$

10 $$\int \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + f'(x) \cdot f(x) \right] dx$$

11 $$\int (\ln x)' \frac{dx}{\ln^2 x}$$

12 Докажите, что если $F'(x) = f(x)$,

то $\int f\left[f(x)\right] \cdot f'(x) dx = F\left[f(x)\right] + C$

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

Использованная литература

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл.сред. шк.– М.: Просвещение, 1991.

2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебн. пособие для вузов.– 7-е изд., испр.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
3. Резник Н.А. Неопределенный интеграл: Визуальный конспект-практикум. Вып. I. Начальные представления о технике интегрирования Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. - 80 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Резник Н.А. Начальные представления о технике интегрирования: Визуальный конспект-практикум. – СПб, Изд-во "Информатизация образования", 2001. – 72 с.

Дифференцирование

$f'(x)$ ← ← ← $f(x)$

k	$kx+p$	$k\dfrac{x^2}{2}+px$
nx^{n-1}	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{1}{(n+1)x^{n-1}}$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$-\dfrac{1}{x^2\cdot\ln a}$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	$\log_a\|x\|$
$a^x\cdot\ln a$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x	e^x
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln\|\cos x\|$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln\|\sin x\|$
$-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x$ $-\operatorname{arcctg} x$

$f(x)$ → → → $\int f(x)dx$

Интегрирование $+C$