Н.А. РЕЗНИК, Г.Б. КАЗАКОВА

Неопределенный интеграл

Визуальный конспект-практикум

Выпуск II
Часть 1

Простейшие методы интегрирования

ИНСТИТУТ ПРОДУКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. РЕЗНИК

Неопределенный интеграл

Визуальный конспект-практикум

Выпуск II
Часть 1

Простейшие методы интегрирования

Мурманск
1998

УДК 512.83(07)
ББК 22.143. я7

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный коспект-практикум. Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

Второй выпуск визуального конспекта-практикума "Неопределенный интеграл" разработан для студентов 1-го курса технологического факультета Мурманского государственного технического университета с целью помочь им получить представления о простейших методах интегрирования. В данном выпуске содержится более 500 задач и упражнений различного уровня сложности. Ответы к упражнениям и подробные решения к задачам на доказательство приведены во 2-й части данного выпуска. Отдельные страницы и примеры пособия могут быть использованы в качестве дополнительных дидактических материалов в 11-х классах средних общеобразовательных школ с углубленным и расширенным изучением математики, а также в группах технических специализаций техникумов и колледжей. Конспект-практикум может оказать помощь в самостоятельных занятиях студентам вечернего и заочного отделений университета.

The second issue of the visual manual "Indefinite Integral" has been worked out for students of the 1-st course of the Technological Faculty of the Murmansk State Technical University in order to help them to get knowledge about elementary methods of integration. The manual contains more than 500 tasks and exercises of the various level of complexity. Key answers and detailed decisions to the tasks are given in the second part of the issue. Separate pages and examples of the manual can be used as additional didactic materials for the 11-th forms of secondary schools with advanced study of mathematics, and also in technical schools and colleges. The manual can be useful for students of evening and correspondence courses of the University.

Рецензент - Н.Р. Ланина, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики Мурманского государственного технического университета

Резник Наталия Александровна
Казакова Галина Борисовна
Неопределенный интеграл: Визуальный коспект-практикум: Выпуск II. Часть 1-я

© Графика, компьютерный набор и верстка Н.А.Резник

Редактор Е.В. Смирнова
Корректор Т.А. Пехтерева

ISBN 5-86185-0960X

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

1 АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ПОДЫНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ АРГУМЕНТ

$F(x), f(x): \ \forall x \in \langle a; b \rangle$

$$\Big[\underbrace{F(x)}_{\text{Первообразная для } f(x)}\Big]' = \underbrace{f(x)}_{\text{Производная от } F(x)}$$

Множество первообразных для $f(x)$

$$f(x) = \Big[\overbrace{F(x)+C}\Big]'$$

$C - \forall\ const$

$\Longleftrightarrow$

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x)+C}_{\text{Неопределенный интеграл функции } f(x)}$$

$$\underbrace{\int \underbrace{f(\overbrace{x}^{\text{Аргумент}})}_{\text{Подынтегральная функция}} \; d\overbrace{x}^{\text{Переменная интегрирования}}}_{\text{Подынтегральное выражение}}$$

$$\underbrace{\int f(*)\,d*}_{} = \underbrace{F(*)+C}_{}$$

$[\ \cdots\ ]'$

1 Докажите, что

2 Докажите, что

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{matrix} +\operatorname{arctg} x \\ -\operatorname{arcctg} x \end{matrix} + C$$

3 Докажите, что

4 Докажите, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{matrix} +\arcsin x \\ -\arccos x \end{matrix} + C$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Серия **5**	Восстановите подынтегральную функцию
1	$\int (\qquad) \, dx = \mathbf{77}\, x + C$
2	$\int (\qquad) \, dx = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}x} + C$
3	$\int (\qquad) \, dx = \mathbf{ln}\lvert x \rvert + C$
4	$\int (\qquad) \, dx = \mathbf{tg}\, x + C$
5	$\int (\qquad) \, dx = \mathbf{arc\,ctg}\, x + C$

Серия **6**	Восстановите подынтегральную функцию
1	$\dfrac{x^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} + C = \int (\qquad) \, dx$
2	$\mathbf{121} \cdot \mathbf{sin}\, x + C = \int (\qquad) \, dx$
3	$\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2} \cdot x} + C = \int (\qquad) \, dx$
4	$\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} x\sqrt{x} + C = \int (\qquad) \, dx$
5	$-\dfrac{\mathbf{ln}\lvert \mathbf{cos}\, x \rvert}{\mathbf{e}^{\mathbf{2}}} + C = \int (\qquad) \, dx$

7	Докажите, что

$$\int (\mathbf{ctg}\, x + \mathbf{tg}\, x) \, dx = \mathbf{ln}\lvert \mathbf{tg}\, x \rvert + C$$

8	Докажите, что

$$\int \left(-\frac{\mathbf{4}\,\mathbf{cos}\,\mathbf{2}x}{\mathbf{sin}^2 \mathbf{2}x} \right) dx = \mathbf{tg}\, x + \mathbf{ctg}\, x + C$$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

2

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Производная Первообразная $\boxed{+C}$

$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$	$\int f(x)dx$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$
$\mathbf{n}x^{\mathbf{n}-1}$	$x^{\mathbf{n}}$	$\dfrac{x^{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{n}+1}$
$-\dfrac{\mathbf{n}}{x^{\mathbf{n}+1}}$	$\dfrac{1}{x^{\mathbf{n}}}$	$-\dfrac{1}{(\mathbf{n}-1)\,x^{\mathbf{n}-1}}$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$-\dfrac{1}{x^2\cdot\ln\mathbf{a}}$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln\mathbf{a}}$	$\log_{\mathbf{a}}\lvert x\rvert$
$\mathbf{a}^x\cdot\ln\mathbf{a}$	$\mathbf{a}^x$	$\dfrac{\mathbf{a}^x}{\ln\mathbf{a}}$
$\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\cos x}=\sec x$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right\rvert=\ln\left\lvert\dfrac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x\right\rvert$
$-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\dfrac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert=\ln\left\lvert\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x\right\rvert$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Найдите интеграл

1 Тренажер

1	$\int \mathbf{2}^x dx =$
2	$\int \mathbf{3}^x \cdot \mathbf{5}^x dx =$
3	$\int \sqrt{\mathbf{4}^x} dx =$
4	$\int \frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{10}^x} dx =$
5	$\int \left(\mathbf{3}^x\right)^{\mathbf{2}} dx =$

2 Тренажер

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$	1
$\int \left(-\frac{\mathbf{1}}{x^{\mathbf{2}}}\right) dx =$	2
$\int \mathbf{cosec}\, x\, dx =$	3
$\int \left(-\mathbf{tg}\, x\right) dx =$	4
$\int \left(-\frac{\mathbf{cos}\, x}{\mathbf{sin}^{\mathbf{2}} x}\right) dx =$	5

Найдите интеграл

3 Тренажер

1	$\int \sqrt[3]{x}\, dx =$
2	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx =$
3	$\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^5}} dx =$
4	$\int \frac{x^{\mathbf{2}}}{\sqrt{x}} dx =$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}} =$

3

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ

$$\int f[\,x\,]\,d[\,x\,] = F[\,x\,] + C$$

Возможна замена на любой символ

Внимание!!! *Обязательно совпадение!*

$$\int f[\,*\,]\,d[\,*\,] = F[\,*\,] + C$$

ПРИМЕР

$$\int \boxed{*}\; d\; \boxed{*} = \frac{\boxed{*}^2}{2} + C$$

$$\int \boxed{y}\; d\; \boxed{y} = \frac{\boxed{y}^2}{2} + C$$

$$\int \boxed{\cos t}\; d\; \boxed{\cos t} = \frac{\left(\boxed{\cos t}\right)^2}{2} + C$$

$$\int \sqrt{\cos\alpha}\, d\sqrt{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2} + C$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\boxed{d\int} f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

$$= d\left[F(x) + C\right] = dF(x) + \underbrace{dC}_{0} = dF(x) = F'(x)\,dx =$$

Дифференциал от неопределенного интеграла

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' dx = f(x)$$

$$\left[F(x) + C\right]' = F'(x) + \underbrace{C'}_{0} =$$

Производная от неопределенного интеграла

$$\boxed{\int d}\, F(x) = F(x) + C$$

$$\int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx =$$

Неопределенный интеграл для дифференциала функции

ПРИМЕР

$$\boxed{d\int} \cos 5x\,dx = \cos 5x\,dx \qquad \boxed{\int d} \cos 5x = \cos 5x + C$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

МАТРИЦА **1**	Для каждого интеграла			
ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ	определите подходящую замену	осуществите замену в интеграле	определите перво-образную	оформите результат
$\int \mathbf{e}^{\sqrt{\sin x}} d\sqrt{\sin x}$				
$\int \sin x\, d\sqrt{\sin x}$				
$\int \mathrm{ctg}^2\sqrt{\mathrm{tg}\, x}\, d\, \mathrm{ctg}\sqrt{\mathrm{tg}\, x}$				
$\int \frac{d\,\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{\mathrm{tg}\, x^2}}$				
$\int \frac{d\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sin^2\sqrt{x}}}$				

Серия **2**	Найдите интеграл
1	$\int \mathrm{tg}^2 x\, d\, \mathrm{tg}\, x =$
2	$\int \mathrm{tg}\, x\, d\, \mathrm{tg} x =$
3	$\int \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}\, d\, \mathrm{tg}\, x =$
4	$\int 4^{\mathrm{tg}\, x} d\, \mathrm{tg}\, x =$
5	$\int 2\sqrt{\mathrm{tg}\, x}\, d\, 4\mathrm{tg}\, x =$

Серия 3	Найдите интеграл
1	$\int d\ln x =$
2	$\left[\int 4\mathrm{tg}\sqrt{x}\, dx\right]' =$
3	$d\int s\, d\sqrt{2}\, s =$
4	$\int d\,\frac{1}{5x} =$
5	$d\int \sqrt{\cos x}\, d\sqrt{\cos x} =$

4 АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ОСОБЕННОСТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ $f(x \pm \mathbf{p})$

$$\int f[x \pm \mathbf{p}]\,dx = $$

$$= \int f[x \pm \mathbf{p}]\,d[x \pm \mathbf{p}] = $$

корректировка переменной интегрирования

$$= F[x \pm \mathbf{p}] + C$$

Посмотрите и сравните!

$$[f(x \pm \mathbf{p})]' = $$

$$= f'(x \pm \mathbf{p}) \cdot \underbrace{(x \pm \mathbf{p})'}_{1} = $$

$$= f'(x \pm \mathbf{p})$$

ПРИМЕР

$$\int \mathbf{cos}(x-\mathbf{5})dx = \int \mathbf{cos}(x-\mathbf{5})d(x-\mathbf{5}) = \mathbf{sin}(x-\mathbf{5}) + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2(x+\mathbf{3})}dx = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2(x+\mathbf{3})}d(x+\mathbf{3}) = \frac{\mathbf{tg}(x+\mathbf{3})}{\mathbf{3}} + C$$

Найдите интеграл

1	$\int \frac{\mathbf{1}}{(x-\mathbf{1})^2}dx =$
2	$\int \frac{\mathbf{1}}{(x+\mathbf{2})^2}dx =$
3	$\int \frac{\mathbf{1}}{(x-\mathbf{3})^3}dx =$
4	$\int \frac{\mathbf{1}}{(x+\sqrt{\mathbf{5}})^5}dx =$
5	$\int \frac{\mathbf{1}}{(x-\pi)^9}dx =$

2 Докажите, что

$$\int f(x)d(x \pm \mathbf{p}) = F(x) + C$$

3 Докажите, что

$$\int f(x-\mathbf{p})d(x+\mathbf{p}) = F(x-\mathbf{p}) + C$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

4 Тренажер

Найдите интеграл

1	$\int \frac{dx}{x-\mathbf{135}} =$
2	$\int \frac{dx}{(x-\mathbf{531})^3} =$
3	$\int \mathbf{cos}\,(x+\mathbf{153})\,dx =$
4	$\int \frac{\mathbf{sin}\,(x-\mathbf{315})}{\mathbf{cos}^2\,(x-\mathbf{315})}\,dx =$
5	$\int \mathbf{7}^{\,x+\mathbf{531}}\,dx =$

Серия **5** Восстановите недостающие данные в неопределенном интеграле

1	$\int d\left(x-\sqrt{\mathbf{3}}\right) = \qquad + C$
2	$\int \qquad d\left(x-\sqrt{\mathbf{3}}\right) = \frac{x^2}{\mathbf{2}} + C$
3	$\int \frac{dx}{\qquad} = -\frac{\mathbf{1}}{\left(x-\sqrt{\mathbf{3}}\right)} + C$
4	$\int \frac{d\left(x+\sqrt{\mathbf{3}}\right)}{x-\sqrt{\mathbf{3}}} = \qquad + C$
5	$\int (\qquad)\,d\,(-x) = \frac{\left(\sqrt{\mathbf{3}}-x\right)^2}{\mathbf{2}} + C$

Серия **6** Восстановите подынтегральную функцию

1	$\int (\qquad)\,d\,(x+\mathbf{1}) = \mathbf{sin}\,(x+\mathbf{1}) + C$
2	$\int (\qquad)\,d\,(x-\mathbf{1}) = \mathbf{tg}\,(x-\mathbf{1}) + C$
3	$\int (\qquad)\,d\left(\sqrt{\mathbf{2}}+x\right) = -\mathbf{ln}\left|\mathbf{cos}\left(\sqrt{\mathbf{2}}+x\right)\right| + C$
4	$\int (\qquad)\,d\left(x-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(x-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + C$
5	$\int (\qquad)\,d\,\mathbf{sin}\left(x-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{ln}\left|\mathbf{sin}\left(x-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)\right| + C$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

5

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ВЛИЯНИЕ ЧИСЛОВОГО МНОЖИТЕЛЯ АРГУМЕНТА ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА РЕЗУЛЬТАТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\left(f[\mathbf{k}x]\right)' = f'[\mathbf{k}x]\cdot \underbrace{[\mathbf{k}x]'}_{\mathbf{k}} = \boxed{\mathbf{k}}\; f'[\boxed{\mathbf{k}}\,x]$$

Посмотрите и сравните!

$$\int f[\mathbf{k}x]\,dx = \boxed{\frac{1}{\mathbf{k}}}\int f[\mathbf{k}x]\,d[\mathbf{k}x] = \boxed{\frac{1}{\mathbf{k}}}F[\mathbf{k}x] + C$$

Корректировка переменной интегрирования

ПРИМЕР

$$\int \mathbf{cos\,5}x\,dx = \boxed{\frac{1}{5}}\int \mathbf{cos\,5}x\,d\boxed{5x} = \frac{1}{5}\,\mathbf{sin\,5}x + C$$

Корректировка переменной интегрирования

$$\int \frac{1}{\mathbf{cos}^2\,3x}\,dx = \boxed{\frac{1}{3}}\int \frac{1}{\mathbf{cos}^2\,3x}\,d\boxed{3x} = \frac{\mathbf{tg}\,3x}{3} + C$$

ПРИМЕР

1 Докажите, что $\int[\mathbf{k}\cdot f(\mathbf{k}x)]\,dx = F(\mathbf{k}x) + C$

2 Докажите, что $\int\left[\frac{1}{\mathbf{k}}\cdot f\left(\frac{x}{\mathbf{k}}\right)\right]dx = F\left(\frac{x}{\mathbf{k}}\right) + C$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

МАТРИЦА **3**	Для каждого интеграла			
СВОЙСТВО ЧИСЛОВОГО МНОЖИТЕЛЯ АРГУМЕНТА ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ	определите: аргумент подынтегральной функции	определите: переменную интегрирования	осуществите корректировку переменной интегрирования	запишите результат интегрирования
$\int \mathbf{ctg}\, x\, d\sqrt{\mathbf{2}}x$				
$\int \mathbf{tg}\, \sqrt{\mathbf{2}}x\, d\, x$				
$\int \mathbf{ctg}\, \mathbf{2}x\, d\sqrt{\mathbf{2}}x$				
$\int \mathbf{tg}\sqrt{\mathbf{2}}x\, d\, \mathbf{2}\, x$				
$\int \mathbf{ctg2}\sqrt{\mathbf{2}}\, x\, d\dfrac{x}{\sqrt{\mathbf{2}}}$				

4 Тренажер

Найдите интеграл

1	$\int \mathbf{tg\,111}x\, dx =$
2	$\int \mathbf{ctg}\dfrac{x}{\mathbf{222}}\, dx =$
3	$\int \dfrac{dx}{\mathbf{sin}^2\, \mathbf{333}x} =$
4	$\int \dfrac{dx}{\mathbf{sin}\dfrac{x}{\mathbf{555}}} =$
5	$\int \dfrac{dx}{\mathbf{cos\,444}x} =$

Серия **5** Найдите интеграл

1	$\int \sqrt{\mathbf{2}}\, s\, d\sqrt{\mathbf{2}}\, s =$
2	$\int \mathbf{2\,ln}\, x\, d\, \mathbf{ln}\, x =$
3	$\int \mathbf{4\,tg}\sqrt{x}\, d\, \mathbf{tg}\sqrt{x} =$
4	$\int \dfrac{\mathbf{5}}{x}\, d\, \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}x} =$
5	$\int \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{cos}\, x\, d\, \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{cos}\, x} =$

6

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЛОГАРИФМЫ В КАЧЕСТВЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Производная		Первообразная
$\boxed{f(x)}$	☞	$\int f(x)\,dx\ \boxed{+C}$
$f'(x)$	☜	$\boxed{f(x)}$

$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x$ $-\operatorname{arcctg} x$
$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x-1}{x+1}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $-\arccos x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm 1}\right\rvert$

1 Докажите, что

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\ln\left\lvert\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right\rvert+C$$

2 Докажите, что

$$\int\frac{1}{(\mathbf{k}x)^2-1}\,dx=-\frac{1}{2\mathbf{k}}\ln\left\lvert\frac{\mathbf{k}x+1}{\mathbf{k}x-1}\right\rvert+C$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Мысленно осуществите корректировку переменной интегрирования и найдите интеграл

3 Тренажер		4 Тренажер
$\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$	1	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}} =$
$\int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$	2	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-1}} =$
$\int \frac{dx}{(x-1)^2-1} =$	3	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+(x-\pi)^2}} =$
$\int \frac{dx}{1-(x-1)^2} =$	4	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2e)^2}} =$
$\int \frac{dx}{1+\left(x-e^2\right)^2} =$	5	$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+1}} =$

	Серия **5** Осуществите корректировку переменной интегрирования	Серия **6** Найдите интеграл
1 $\int \frac{dx}{(2x)^2+1} =$		
2 $\int \frac{dx}{9x^2-1} =$		
3 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} =$		
4 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{e^2}}} =$		
5 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-1}} =$		

7

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

РАСШИРЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

a – «*свободный*» *параметр*

Список интегралов
со «*свободными параметрами*»

$$\int\frac{dx}{\mathbf{a}^2+x^2} \qquad \int\frac{dx}{x^2-\mathbf{a}^2} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm\mathbf{a}^2}} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{\mathbf{a}^2-x^2}}$$

«СВОБОДНЫЙ» ПАРАМЕТР В ИНТЕГРАЛЕ ВИДА $\int\frac{dx}{\mathbf{a}^2+x^2}$

Табличный интеграл

$$\int\frac{d*}{1+*^2}=\mathbf{arctg}*+C$$

Поиск

$$\int\frac{dx}{(\underbrace{\mathbf{a}}_{\text{«Свободный» параметр}})^2+x^2}=\frac{1}{\mathbf{a}^2}\int\frac{dx}{\frac{\mathbf{a}^2+x^2}{\mathbf{a}^2}}=$$

$$=\frac{1}{\mathbf{a}^2}\cdot\mathbf{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\mathbf{a}}\right)^2}\,d\frac{x}{\mathbf{a}}=$$

$$=\frac{1}{\mathbf{a}}\ \mathbf{arctg}\frac{x}{\mathbf{a}}+C$$

Проверка

$$\left(\frac{1}{\mathbf{a}}\,\mathbf{arctg}\frac{x}{\mathbf{a}}+C\right)'=\frac{1}{\mathbf{a}}\left(\mathbf{arctg}\frac{x}{\mathbf{a}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\mathbf{a}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\mathbf{a}}\right)^2}\cdot\frac{x}{\mathbf{a}}=\frac{1}{\mathbf{a}^2}\cdot\frac{1}{\frac{\mathbf{a}^2+x^2}{\mathbf{a}^2}}=$$

$$=\frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{a}^2\left(\mathbf{a}^2+x^2\right)}=\frac{1}{\mathbf{a}^2+x^2}$$

Определите «свободный» параметр подынтегральной функции

1 Тренажер

№	Интеграл	
1	$\int\frac{dx}{5^2+x^2}$	
2	$\int\frac{dx}{4-x^2}$	
3	$\int\frac{dx}{3-x^2}$	
4	$\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}}$	

2 Тренажер

	Интеграл	№
	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\mathbf{e}^2}}$	1
	$\int\frac{dx}{\sqrt{\mathbf{e}^4+x^2}}$	2
	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\mathbf{e}}}$	3
	$\int\frac{dx}{\sqrt{\ln 2-x^2}}$	4

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

«СВОБОДНЫЙ» ПАРАМЕТР В ИНТЕГРАЛЕ ВИДА $\int \frac{dx}{x^2 - \mathbf{a}^2}$

Табличный интеграл

$$\int \frac{\mathbf{1}}{*^2 - \mathbf{1}}\, d* = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ln\left|\frac{* - \mathbf{1}}{* + \mathbf{1}}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - \mathbf{a}^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2 - \mathbf{a}^2}{\mathbf{a}^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}^2} \cdot \mathbf{a} \int \frac{\mathbf{1}}{\left(\frac{x}{\mathbf{a}}\right)^2 - \mathbf{1}}\, d\,\frac{x}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} \ln\left|\frac{\frac{x}{\mathbf{a}} - \mathbf{1}}{\frac{x}{\mathbf{a}} + \mathbf{1}}\right| + C =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2a}} \ln\left|\frac{\frac{x - \mathbf{a}}{\mathbf{a}}}{\frac{x + \mathbf{a}}{\mathbf{a}}}\right| + C = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2a}} \ln\left|\frac{x - \mathbf{a}}{x + \mathbf{a}}\right| + C$$

Докажите, что

3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\mathbf{a}^2 - *^2}} = \arcsin\frac{*}{\mathbf{a}} + C$$

Табличный интеграл

$$\int \frac{d*}{\sqrt{\mathbf{1} - *^2}} = \arcsin * + C$$

(Рассмотрите при $a < \mathbf{0}$)

4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + *^2}} = \ln\left| x + \sqrt{\mathbf{a}^2 + *^2} \right| + C$$

Табличный интеграл

$$\int \frac{d*}{\sqrt{\mathbf{1} + *^2}} = \ln\left| * + \sqrt{\mathbf{1} + *^2} \right| + C$$

(Рассмотрите при $a > \mathbf{0}$)

8

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

СТРУКТУРА ТАБЛИЧНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Заполните пропуски в таблице

1 Тренажер

2 Тренажер

Структура $f(*)$	$f(x)$	$\longrightarrow \int f(x)\,dx + C$	*Структура* $\int f(*)\,dx$
$\dfrac{1}{(*)^2+\mathbf{a}^2}$			$\dfrac{1}{\mathbf{a}}\,\mathbf{arctg}\,\dfrac{*}{\mathbf{a}}$ $-\dfrac{1}{\mathbf{a}}\,\mathbf{arcctg}\,\dfrac{*}{\mathbf{a}}$
	$\dfrac{1}{x^2-\mathbf{a}^2}$	$\dfrac{1}{2\mathbf{a}}\ln\left\lvert\dfrac{x-\mathbf{a}}{x+\mathbf{a}}\right\rvert$	
$\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2-(*)^2}}$			$\mathbf{arcsin}\,\dfrac{*}{\mathbf{a}}$ $-\mathbf{arccos}\,\dfrac{*}{\mathbf{a}}$
	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm\mathbf{a}^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm\mathbf{a}^2}\right\rvert$	

ПРИМЕР

$$\int\frac{dx}{5+x^2}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{5}\right)^2+x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C$$

3 Докажите, что

$$\int\frac{dx}{\mathbf{a}^2+\left(\dfrac{x}{\mathbf{a}}\right)^2}=\mathbf{arctg}\,\frac{x}{\mathbf{a}^2}+C$$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Восстановите подынтегральную функцию по ее первообразной

4 Тренажер

1	$\int (\qquad) dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert + C$
2	$\int (\qquad) dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-9}\right\rvert + C$
3	$\int (\qquad) dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+2}\right\rvert + C$
4	$\int (\qquad) dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-3}\right\rvert + C$
5	$\int (\qquad) dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-\sqrt{2}}\right\rvert + C$

5 Тренажер

$\int (\qquad) dx = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	1
$\int (\qquad) dx = \frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{2+x}{2-x}\right\rvert + C$	2
$\int (\qquad) dx = \frac{1}{6}\ln\left\lvert\frac{3+x}{3-x}\right\rvert + C$	3
$\int (\qquad) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right\rvert + C$	4
$\int (\qquad) dx = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\ln\left\lvert\frac{x-\sqrt[4]{3}}{x+\sqrt[4]{3}}\right\rvert + C$	5

Серия **6** Найдите интеграл

1 $\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{7}\right)^2} =$

2 $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+25}} =$

3 $\int \left(-\frac{1}{\sqrt{4-s^2}}\right) ds =$

4 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\sqrt{7}}} =$

5 $\int \frac{dr}{r^2-3} =$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

9

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ВАЖНОЕ СВОЙСТВО ТАБЛИЧНОГО ИНТГЕРАЛА

$$\int f(*)\,d(*) = F(*)+C$$

$$\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\mathbf{k}}}\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,d(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) = \boxed{\frac{1}{\mathbf{k}}}F(\mathbf{k}x+\mathbf{p})+C$$

При использовании таблицы интегралов переменную интегрирования необходимо корректировать так, чтобы ***совпадали*** аргумент подынтегральной функции и переменная интегрирования

ПРИМЕР

$$\int \mathbf{tg}(\boxed{\mathbf{1}-\mathbf{5}x})\,dx = \boxed{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}}\int \mathbf{tg}(\boxed{\mathbf{1}-\mathbf{5}x})\,d(\boxed{-\mathbf{5}x}) =$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\int \mathbf{tg}(\boxed{\mathbf{1}-\mathbf{5}x})\,d(\boxed{\mathbf{1}-\mathbf{5}x}) =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\,\mathbf{ln}\left|\,\mathbf{cos}(\boxed{\mathbf{1}-\mathbf{5}x})\right| + C$$

1 Тренажер

Заполните пропуски в решении примера

1	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\mathbf{1}-(\mathbf{2}x)^2}} = \square\int \frac{d\,\square}{\sqrt{\mathbf{1}-(\mathbf{2}x)^2}} = \square\,\mathbf{arcsin}\,\square + C$
2	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\mathbf{1}-\mathbf{9}x^2}} = \square\int \frac{d\,\square}{\sqrt{\mathbf{1}-(\mathbf{3}x)^2}} = \square\,\mathbf{arcsin}\,\square + C$
3	$\displaystyle\int \frac{d\,\mathbf{2}x}{\sqrt{\mathbf{1}-\ \mathbf{2}x^2}} = \square\int \frac{d\,\square}{\sqrt{\mathbf{1}-(\square)^2}} = \square\,\mathbf{arcsin}\,\square + C$
4	$\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{\mathbf{1}-(z-\mathbf{1})^2}} = \square\int \frac{d(\square)}{\sqrt{\mathbf{1}-(z-\mathbf{1})^2}} = \square\,\mathbf{arcsin}\,\square + C$
5	$\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{\mathbf{1}-(\mathbf{2}y-\mathbf{1})^2}} = \square\int \frac{d(\square)}{\sqrt{\mathbf{1}-(\mathbf{2}y-\mathbf{1})^2}} = \square\,\mathbf{arcsin}\,\square + C$

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

1	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}} =$
2	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-1}} =$
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+(\pi-x)^2}} =$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2e-x)^2}} =$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(1-\sqrt{2}x)^2}{2}}} =$

Для каждого интеграла		определите аргумент подынтегральной функции		осуществите корректировку переменной интегрирования		найдите интеграл
$\int \frac{dx}{(x-1)^2}$	1		1		1	
$\int \frac{dx}{(1-x)^3}$	2		2		2	
$\int \frac{dx}{(2x+1)^4}$	3		3		3	
$\int \frac{dx}{(1-3x)^5}$	4		4		4	
$\int \frac{dx}{\left(5-\frac{x}{4}\right)^{10}}$	5		5		5	

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

10

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ИНТЕГРАЛЕ СО «СВОБОДНЫМ» ПАРАМЕТРОМ

$$\int f(\mathbf{a}, x\pm\mathbf{p})\,dx=\int f(\mathbf{a}, x\pm\mathbf{p})\,d(x\pm\mathbf{p})$$

Корректировка переменной интегрирования

$$\int f(\mathbf{a}, \mathbf{k}x)\,dx=\frac{1}{\mathbf{k}}\int f(\mathbf{a}, \mathbf{k}x)\,d(\mathbf{k}x)$$

$$\int f(\underbrace{\ \mathbf{a}\ }_{\text{«Свободный» параметр}};\ \overbrace{\mathbf{k}}\cdot x+\overbrace{\mathbf{p}})\,dx$$

Параметры линейного аргумента

ПРИМЕР

$$\int\frac{dx}{\underbrace{9}_{\mathbf{a}^2}+(3x)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d\,3x}{\underbrace{3}_{\mathbf{a}}{}^2+(3x)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\underbrace{3}_{\mathbf{a}}}\,\mathbf{arctg}\frac{3x}{\underbrace{3}_{\mathbf{a}}}+C=\frac{1}{9}\,\mathbf{arctg}\,x+C$$

$$\int\frac{dx}{\underbrace{\sqrt{7}}_{\mathbf{a}^2}+\left(x+\sqrt[3]{7}\right)^2}=\int\frac{d\left(x+\sqrt[3]{7}\right)}{(\underbrace{\sqrt[4]{7}}_{\mathbf{a}})^2+\left(x+\sqrt[3]{7}\right)^2}=\frac{1}{\underbrace{\sqrt[4]{7}}_{\mathbf{a}}}\,\mathbf{arctg}\,\frac{x+\sqrt[3]{7}}{\underbrace{\sqrt[4]{7}}_{\mathbf{a}}}+C$$

ПРИМЕР

МАТРИЦА 1 ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ЛИНЕЙНОГО АРГУМЕНТА	Для каждой подынтегральной функции определите параметр: «свободный»	аргумента	Восстановите данные в оформлении корректировки переменной интегрирования	Найдите интеграл
$\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2-1}}$			$\boxed{}\int\frac{d\boxed{}}{\sqrt{(4x)^2-1}}$	
$\int\frac{dx}{25-4x^2}$			$\boxed{}\int\frac{d\boxed{}}{(5)^2-(\quad)^2}$	
$\int\frac{dx}{\sqrt{2+9x^2}}$			$\boxed{}\int\frac{d\boxed{}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\quad)^2}}$	
$\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$			$\boxed{}\int\frac{d\boxed{}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\quad)^2}}$	
$\int\frac{dx}{\frac{1}{7}-7x^2}$			$\boxed{}\int\frac{d\boxed{}}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2-(\quad)^2}$	

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

Тест **2** Восстановите интеграл	$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$	$2\int\frac{dx}{4+x^2}$	$\int\frac{dx}{1+4x^2}$	$\int\frac{dx}{4+16x^2}$	$\int\frac{dx}{16+4x^2}$	$\int\frac{dx}{1+16x^2}$	$4\int\frac{dx}{1+16x^2}$
$\frac{\operatorname{arctg}4x}{4}+C$							
$\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+C$							
$\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$							
$\frac{\operatorname{arctg}2x}{2}+C$							
$\operatorname{arctg}4x+C$							

Серия 3 Восстановите подынтегральную функцию

1. $\int[\quad]\,dx=\frac{(kx+p)^3}{3k}+a^2x+C$
2. $\int\left[\quad\right]dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{(kx+p)}{a}+C$
3. $\int\left[\quad\right]dx=\frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{kx+p-a}{kx+p+a}\right|+C$
4. $\int\left[\quad\right]dx=\ln\left|x+\frac{\sqrt{(kx+p)^2\pm a^2}}{k}\right|+C$
5. $\int\left[\quad\right]dx=\frac{1}{k}\arcsin\frac{kx+p}{a}+C$

Серия 4 Найдите интеграл

1. $\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=$
2. $\int\frac{dx}{(5x-3)^2-9}=$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+\left(3x+\frac{1}{7}\right)^2}}=$
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-(7x+\sqrt{3})^2}}=$
5. $\int\frac{dx}{\sqrt{(7-6x)^2-\sqrt{2}}}=$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

Информационная схема
«АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА»

$$\underbrace{\int \underbrace{f(\overbrace{x}^{\text{Аргумент}})}_{\text{Подынтегральная функция}}\, d\overbrace{x}^{\text{Переменная интегрирования}}}_{\text{Подынтегральное выражение}}$$

$$\int \underbrace{f(*)}\, d(*) = \underbrace{F(*)} + C, \qquad [\,\cdots\,]'$$

СТРУКТУРА ТАБЛИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

Производная — **Функция** — Первообразная $\boxed{+C}$

ГЛАВНЫЙ ПРИНЦИП ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦЫ

$$\int f(*)\ d* = F(*) + C$$

ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\boxed{d\int} f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

$$\left[\int \boxed{f(x)}\,dx\right]' = \boxed{f(x)}$$

$$\boxed{\int d}\,F(x) = F(x) + C$$

КОРРЕКТИРОВКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,dx = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}}\int f(\mathbf{k}x+\mathbf{p})\,d(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\,F(\mathbf{k}x+\mathbf{p}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\mathbf{a}^2 + x^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\,\mathbf{arctg}\,\frac{x}{\mathbf{a}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - \mathbf{a}^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\,\mathbf{ln}\left|\frac{x-\mathbf{a}}{x+\mathbf{a}}\right| + C$$

Параметры линейного аргумента

$$\int f(\underbrace{\mathbf{a}}_{\text{«Свободный» параметр}};\ \overbrace{\mathbf{k}}\cdot x + \overbrace{\mathbf{p}})\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\mathbf{a}^2 - x^2}} = \mathbf{arc\,sin}\,\frac{x}{\mathbf{a}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \mathbf{a}^2}} = \mathbf{ln}\left|x + \sqrt{x^2 \pm \mathbf{a}^2}\right| + C$$

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1 $\int \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) d\varphi =$

2 $\int (2x-5)^{10}\, dx =$

3 $\int \frac{d(a+1)}{4+a^2} =$

4 $\int \frac{d2x^2}{\sqrt{x^4-5}} =$

5 $\int \frac{dy}{9-(y+4)^2} =$

6 $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}\,3x} =$

7 $\int \sqrt[5]{5\cdot 4^x+10}\, d(4^x) =$

Вариант 2

1 $\int \cos(2x+3)\, d(x-1) =$

2 $\int (\mathrm{tg}\,n+4)\, d(\mathrm{tg}\,n) =$

3 $\int e^{5x}\cdot e^2\, d3x =$

4 $\int \frac{d\ln x}{1+(2\ln x)^2} =$

5 $\int \frac{dy}{\sqrt{5y+\ln 3}} =$

6 $\int \frac{d\left(\sqrt{2}\sin x\right)}{\sqrt{8-2(3\sin x+1)^2}} =$

7 $\int \frac{dx}{\sqrt{\pi^2+e^2x^2}} =$

Самостоятельная работа 1

Вариант 3

1 $\int(\pi + x + \mathbf{e})\,d(\mathbf{e}x) =$

2 $\int \frac{dx}{\ln 3^x} =$

3 $\int \frac{d\sin z}{(\mathrm{ctg}z)'} =$

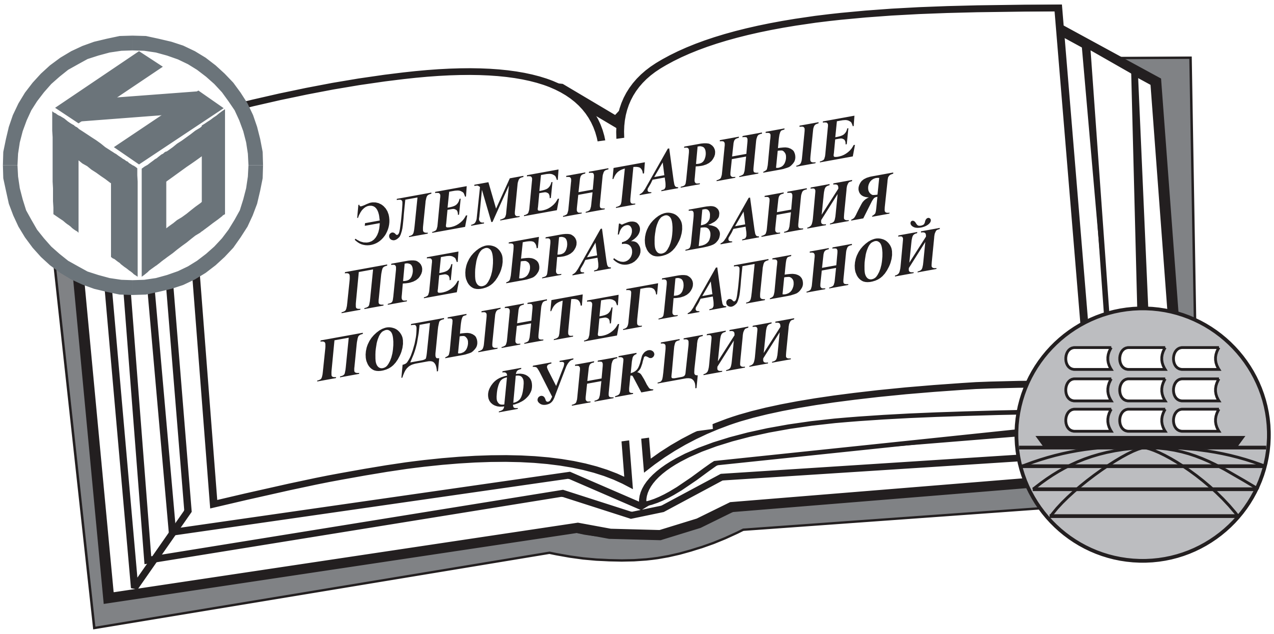
4 $\int \frac{d(y+1)}{4y^2 + \sin^2 4} =$

5 $\int \frac{d(3x-4)}{\sqrt{(2x+1)^2 + \pi}} =$

6 $\int \frac{dx}{\sqrt{16-(x^2+2x+1)}} =$

7 $\int\left[\mathrm{tg}\left(\sqrt{2}\sin x\right)\right]d\sin x =$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.



Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

1 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Числовой множитель выносится за знак интеграла

$$\int \mathbf{A}\cdot f(*)\,d(*) = \mathbf{A}\cdot\int f(*)\,d(*)$$

$$\int\left[f(*)\pm g(*)\right]d(*) = \int f(*)\,d(*) \pm \int g(*)\,d(*)$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\int\left[\mathbf{A}\cdot f(x)\pm \mathbf{B}\cdot g(x)\right]dx = \mathbf{A}\cdot\int f(x)\,dx \pm \mathbf{B}\cdot\int g(x)\,dx$$

Метод разложения

ПРИМЕР

$$\int\left[\mathbf{2\cos(3}x\mathbf{+4)} \pm \mathbf{4\sin(2}x\mathbf{+3)}\right]d(x) =$$

$$= \underbrace{\mathbf{2}\int\mathbf{\cos(3}x\mathbf{+4)}\,d(x) \pm \mathbf{4}\int\mathbf{\sin(2}x\mathbf{+3)}\,d(x)}_{\text{Линейность операции интегрирования}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\int\mathbf{\cos(3}x\mathbf{+4)}\,d(\mathbf{3}x\mathbf{+4})}_{\text{Корректировка переменной интегрирования}} \pm \underbrace{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}\cdot\int\mathbf{\sin(2}x\mathbf{+3)}\,d(\mathbf{2}x\mathbf{+3})}_{\text{Корректировка переменной интегрирования}}$$

Каждый интеграл	1 Тренажер	разложите на сумму инегралов	2 Тренажер	и найдите результат
$\int\frac{\mathbf{1}+x}{x^2}dx=$	1		1	
$\int\frac{x^2-\mathbf{1}}{x-\mathbf{1}}dx=$	2		2	
$\int\frac{x^2dx}{\mathbf{1}-x}=$	3		3	
$\int\frac{x-\mathbf{2}\sqrt{x}+\mathbf{2}}{x^2}dx=$	4		4	
$\int\frac{x\sqrt{x}-\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\sqrt{x}}dx=$	5		5	

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Тест **3** Найдите первообразную	2^x	$\frac{4^x}{2}$	$x\ln 2$	$\ln x$	$\ln 2$	$\sqrt{2^x}$	$\frac{2^{x+1}\sqrt{2^x}}{3}$	$\frac{2^x\sqrt{2^x}}{3}$	$\frac{2^x}{\ln 2}$
$\int 2^x\,dx$									
$\int 2^x \ln 2\,dx$									
$\int \frac{1}{2^x}\,d\,2^x$									
$\int \frac{1}{2\sqrt{2^x}}\,d\,2^x$									
$\int 2^x\,d\,2^x$									

4 Тренажер

1	$\int \left(2x+\frac{1}{3x-5}\right)dx=$
2	$\int \left(2x^2+\frac{1}{3x^2-5}\right)dx^2=$
3	$\int \left(2\ln x+\frac{1}{3\ln x-5}\right)d\ln x=$
4	$\int \left(2\ln^2 x+\frac{1}{3\ln^2 x-5}\right)d\ln^2 x=$
5	$\int \left(\frac{2}{\sqrt{\ln x}}+\frac{7}{3-5\sqrt{\ln x}}\right)d\sqrt{\ln x}=$

Серия **5**

Найдите интеграл

1	$\int [\sin x-\cos 2x]\,dx=$
2	$\int [2(x+1)-(4x+2)]\,dx=$
3	$\int (e^{x+1}-e^{2x+1})\,dx=$
4	$\int (2^{3x+1}-3^{2x-1}\ln 3)\,dx=$
5	$\int \left(2^{\frac{1-3x}{2}}-2^{\frac{x-1}{2}}\right)dx=$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум. Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

2 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ВАЖНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

$$\begin{matrix} 2\sin \\ 2\cos \\ 2\sin \end{matrix}\left(\mathbf{k}x\right)\cdot\begin{matrix} \sin \\ \cos \\ \cos \end{matrix}\left(\mathbf{p}x\right) = \begin{matrix} \cos \\ \cos \\ \sin \end{matrix}\left[(\mathbf{k}-\mathbf{p})x\right]\begin{matrix} - \\ + \\ + \end{matrix}\begin{matrix} \cos \\ \cos \\ \sin \end{matrix}\left[(\mathbf{k}+\mathbf{p})x\right]$$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ СИНУСЫ И КОСИНУСЫ

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\cos\alpha$
	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0	α

ЧЕТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in R$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in R$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad \forall x \in [0;\pi]$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$
$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\sin(-\arcsin x) = -x$$

$$\arccos(\cos x) = x$$
$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [0;\pi]$$
$$\cos(\pi - \arccos x) = -x$$

ПРИМЕР

$$\int \sin 2x \cdot \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x \cdot \cos 3x\, dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int\left[\sin(2-3)x + \sin(2+3)x\right]dx}_{\text{Мысленное преобразование}} = \frac{1}{2}\int\left[\sin(-x) + \sin 5x\right]dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int\left[-\sin x + \sin 5x\right]dx}_{\text{Мысленное преобразование}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[-\int \sin x\,dx + \frac{1}{5}\int \sin 5x\,d5x\right]}_{\text{Мысленное преобразование}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x\right] + C$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия 1 Преобразуйте подынтегральную функцию и найдите интеграл

1. $\int \frac{1}{\sin(x-\pi)}\,dx =$

2. $\int \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4}\,dx =$

3. $\int \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)dx =$

4. $\int \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x+\pi)\right]dx =$

5. $\int \frac{\sin x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx}{\sin(x-\pi)} =$

Серия 2 Найдите интеграл

1. $\int \sin(-x)\cdot\sin 3x\,dx =$

2. $\int \cos x\cdot\cos 5x\,dx =$

3. $\int \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx =$

4. $\int \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi-x}{2}\,dx =$

5. $\int \sin x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(x-\pi)\,dx =$

3 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

Понижение степени

$$2\cdot\begin{matrix}\cos^2 x\\ \sin^2 x\end{matrix} = 1\begin{matrix}+\cos 2x\\ -\cos 2x\end{matrix}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕТНЫХ СТЕПЕНЕЙ СИНУСА И КОСИНУСА

$$\int \sin^{2n} x\cdot\cos^{2m} x\,dx =$$

Понижение степени

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$
$$2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$$
$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$
$$2\sin^2 x=1-\cos 2x$$
$$2\cos^2 x=1+\cos 2x$$

Алгебраические преобразования

Интеграл табличной структуры =

= *Корректировка переменной интегрирования* =

= *Ответ*

ПРИМЕР

$$\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int \underbrace{(\sin x\cdot\cos x)^2}_{\text{Мысленное преобразование}}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(2\sin x\cos x)^2\,dx=\underbrace{\frac{1}{4}\int(\sin 2x)^2\,dx}_{\text{Мысленное преобразование}}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx=\underbrace{\frac{1}{8}\int 2\sin^2 2x\,dx}_{\text{Мысленное преобразование}}=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{8}\underbrace{\left[\int dx-\int\cos 4x\,dx\right]}_{\text{Мысленное преобразование}}=$$

$$=\frac{1}{8}\left[x-\underbrace{\frac{1}{4}\int\cos 4x\,d4x}_{\text{Мысленное преобразование}}\right]=\frac{1}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1 Тренажер

1	$\int \cos^2 x\,dx =$
2	$\int \cos^2 2x\,dx =$
3	$\int \sin^2 x\,dx =$
4	$\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx =$
5	$\int \sin^2\left(1-\frac{x}{4}\right)dx =$

Серия **2** Найдите интеграл

1	$\int \sin^2(\pi - x)\,dx =$
2	$\int \cos^2 x \cdot \sin^2(-x)\,dx =$
3	$\int \sin^4 x\,dx =$
4	$\int \left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx =$
5	$\int \frac{1}{\mathrm{tg}^2 2x + 1}\,dx =$

Серия **3** Найдите интеграл

1	$\int \left(1-\mathrm{ctg}^2 x\right)dx =$
2	$\int \left(\sin^2\frac{3x}{2} + \cos^2\frac{2x}{3}\right)dx =$
3	$\int \left[\sin(3x-2) - \cos(3x-2)\right]^2 dx =$
4	$\int \mathrm{tg}^2 x \cdot \sin^2 2x\,dx =$
5	$\int \frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x}\,dx =$

4 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ОБОЗНАЧЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

$$\boxed{f'(x)}\,dx = d\,\boxed{f(x)}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Интегрируемый множитель подынтегральной функции

$$\int g[f(x)]\cdot\boxed{f'(x)}\,dx = \int g[f(x)]\,d\boxed{f(x)}$$

позволяет

преобразовать дифференциал | *изменить структуру интеграла*

ПРИМЕР

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}dx =$$

$$= \int \underbrace{\mathrm{e}^{x^2}}_{\text{нет в таблице}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\text{интегрируемый множитель}}\,dx$$

Преобразование дифференциала

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{\boxed{x^2}}\,d\boxed{x^2} =$$

Изменение структуры подынтегрального выражения

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$$

Использование таблицы

ПРИМЕР

$$\int \frac{\mathbf{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int \underbrace{\mathbf{arctg}\,x}_{\text{нет}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+x^2}}}_{\text{есть первообразная}}\,dx =$$

$$= \int \boxed{\mathbf{arctg}\,x}\,d\boxed{\mathbf{arctg}\,x} =$$

$$= \frac{\mathbf{arctg}^2 x}{2} + C$$

МАТРИЦА **1**	Для каждого интеграла		
ПРЕОБ-РАЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕН-ЦИАЛА	выделите в подынтегральном выражении интегрируемый множитель	запишите интеграл, полученный в результате преобразования дифференциала	найдите первообразную
$\int \frac{\mathrm{e}^x dx}{2\mathrm{e}^x+1}$			
$\int \frac{\mathrm{e}^x dx}{\mathrm{e}^{2x}+1}$			
$\int \frac{\mathrm{e}^{2x} dx}{\mathrm{e}^{2x}+1}$			
$\int \frac{\mathrm{e}^{2x-1} dx}{\mathrm{e}^{2x-1}-1}$			

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

2	Докажите, что	$\int f'(2x)\,dx = \frac{1}{2} f(2x) + C$

3	Докажите, что	$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^2(x)}{2} + C$

Восстановите отсутствующий
интегрируемый множитель / неинтегрируемый множитель
подынтегральной функции

4 Тренажер (интегрируемый множитель)

1	$\int \sin^3 x\,(\qquad)\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$
2	$\int \frac{1}{\ln x}(\qquad)\,dx = \ln\lvert \ln x \rvert + C$
3	$\int a^{e^x}(\qquad)\,dx = \frac{a^{e^x}}{\ln a} + C$
4	$\int \cos\sqrt{x}\,(\qquad)\,dx = \sin\sqrt{x} + C$
5	$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,(\qquad)\,dx = \frac{2\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{3} + C$

5 Тренажер (неинтегрируемый множитель)

$\int \qquad \cdot \frac{1}{x}\,dx = \sin(\ln x) + C$	1
$\int \qquad \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$	2
$\int \qquad \cdot \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert \ln x \rvert + C$	3
$\int \qquad \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$	4
$\int \qquad \cdot \frac{1}{x}\,dx = -\ln\lvert \cos \ln x \rvert + C$	5

Тест 6

Определите отсутствующий множитель подынтегральной функции	x^3	x^2	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$
$\int \sin\frac{x^2}{2}\cdot \qquad dx = -\cos\frac{x^2}{2} + C$										
$\int \sin\sqrt{x}\cdot \qquad dx = 2\cos\sqrt{x} + C$										
$\int \sin \ln x \cdot \qquad dx = \cos \ln x + C$										
$\int \sin\frac{1}{x^2}\cdot \qquad dx = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x^2} + C$										
$\int \sin\frac{1}{x}\cdot \qquad dx = -\cos\frac{1}{x} + C$										

5 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

ПРИМЕР

$$\int \frac{1}{x\ln^8 3x}\,dx = \boxed{\frac{1}{3}}\int \frac{1}{x\ln^8 3x}\,d\boxed{3x} = \int \frac{1}{\ln^8 3x}\cdot\boxed{\frac{1}{3x}}\,d\,3x = \int \frac{1}{\ln^8 3x}\,d\ln 3x = -\frac{1}{7\ln^7 3x} + C$$

Возможные пути преобразований

Корректировка переменной интегрирования — *Выделение интегрируемого множителя*

Выделение интегрируемого множителя — *Корректировка переменной интегрирования*

Преобразование дифференциала

Нахождение результата по таблице

ПРИМЕР

$$\int \cos^2(5x)\cdot\sin(5x)\,dx = \int \cos^2(5x)\cdot\boxed{\sin(5x)}\,dx = \boxed{\frac{1}{5}}\int \cos^2(5x)\cdot\boxed{\sin(5x)}\,d5x = \frac{1}{5}\int \cos^2(5x)\,d\cos(5x) = \frac{1}{15}\cos^3(5x) + C$$

ПРИМЕР | **ПРИМЕР**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}\,\cos^2\left[\sqrt{1-x}\right]} = \qquad\qquad \int \frac{\operatorname{tg}\left[\ln(2x-1)\right]}{2x-1}\,dx =$$

Выделение интегрируемого множителя в структуре подынтегральной функции

$$\int \frac{1}{\cos^2\left[\sqrt{1-x}\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \qquad\qquad \int \operatorname{tg}\left[\ln(2x-1)\right]\cdot\frac{1}{(2x-1)}\,dx =$$

Корректировка переменной интегрирования

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\left[\sqrt{1-x}\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,d(1-x) = \qquad\qquad = \frac{1}{2}\int \operatorname{tg}\left[\ln(2x-1)\right]\cdot\frac{1}{(2x-1)}\,d(2x-1) =$$

Преобразование дифференциала

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\left[\sqrt{1-x}\right]}\,d\sqrt{1-x} = \qquad\qquad = \frac{1}{2}\int \operatorname{tg}\left[\ln(2x-1)\right]\,d\ln(2x-1) =$$

Нахождение результата по таблице

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\sqrt{1-x} + C \qquad\qquad = \frac{1}{2}\ln\left[\cos\ln|2x-1|\right] + C$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1 Тренажер

Заполните пропуски в решении примера

1	$\int 7\frac{\mathbf{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx=\square\int \mathbf{arctg}\,x\,d\,\mathbf{arctg}\,x=\frac{\square\,\mathbf{arctg}^2\,x}{2}+C$
2	$\int\frac{\mathbf{arctg}\,7x}{1+49x^2}\,dx=\square\int \mathbf{arctg}\,7x\,d\,\mathbf{arctg}\,\square=\frac{\mathbf{arctg}^2\,\square}{\square}+C$
3	$\int\frac{\mathbf{arc\,tg}\sqrt{7}x}{1+7x^2}\,dx=\square\int \mathbf{arc\,tg}\sqrt{7}x\,d\,\mathbf{arc\,tg}\,\square=\frac{\mathbf{arc\,tg}^2\,\square}{\square}+C$
4	$\int\frac{(\mathbf{arc\,tg}\,x+7)^2}{1+x^2}\,dx=\square\int(\mathbf{arc\,tg}\,x+7)^2\,d(\qquad)=\frac{(\qquad)^3}{3}+C$
5	$\int\frac{(\mathbf{arc\,tg}\sqrt{7}x+7)}{1+7x^2}\,dx=\frac{\int(\qquad)\,d(\qquad)}{\square}=$

МАТРИЦА **2**	Для каждого интеграла		
АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА	выделите в подынтегральном выражении интегрируемый множитель и преобразуйте дифференциал	запишите, полученный интеграл	найдите первообразную
$\int e^x\sqrt{e^x}\,dx$			
$\int\frac{dx}{\mathbf{tg}\,x\cdot\mathbf{cos}^2\,x}$			
$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$			
$\int\frac{x^3\,dx}{x^4+1}$			
$\int\frac{x\,dx}{x^4+1}$			

6 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЧЕТНЫХ СТЕПЕНЕЙ СИНУСА И КОСИНУСА

$$\int \sin^{2n+1} x\, dx =$$
$$= \int \sin^{2n} x \cdot \sin x\, dx =$$
$$= -\int \left(\sin^2 x\right)^n d\cos x =$$
$$= -\int \left(1-\cos^2 x\right)^n d\cos x =$$

= *Алгебраические преобразования с последующим интегрированием*

Аналогично для $\int \cos^{2n+1} x\, dx$

ПРИМЕР

$$\int \cos^5 x\, dx =$$
$$= \int \cos^4 x \cdot \cos x\, dx =$$
$$= \int \left(\cos^2 x\right)^2 d\sin x =$$
$$= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 d\sin x =$$
$$= \int \left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right) d\sin x =$$
$$= \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

СОПУТСТВУЮЩИЕ ФОРМУЛЫ

Выражение синуса через косинус

Понижение степени

$$\int \begin{pmatrix} \sin^{2n} x \\ \cos^{2n} x \end{pmatrix} dx = \frac{1}{2^n} \int \begin{pmatrix} 1-\cos 2x \\ 1+\cos 2x \end{pmatrix}^n dx = \ldots$$

Выражение косинуса через синус

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ СИНУСА И КОСИНУСА

$n \in N$ $\quad$ $r \in R$ $\quad$ $m \in N$

$$\int \underbrace{\sin^r x \cdot \cos^{2n+1} x}\, dx =$$
$$= \int \downarrow \cdot \cos^{2n} x \cdot \cos x\, dx =$$
$$= \int \downarrow \cdot \cos^{2n} x\; d\sin x =$$
$$= \int \downarrow \cdot \left(\cos^2 x\right)^n d\sin x =$$
$$= \int \sin^{2m-1} x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)^n d\sin x =$$

$$\int \underbrace{\cos^r x \cdot \sin^{2m+1} x}\, dx =$$
$$= \int \downarrow \cdot \sin^{2m} x \cdot \sin x\, dx =$$
$$= -\int \downarrow \cdot \sin^{2m} x\; d\cos x =$$
$$= -\int \downarrow \cdot \left(\sin^2 x\right)^m d\cos x =$$
$$= -\int \cos^r x \cdot \left(1-\cos^2 x\right)^m d\cos x =$$

Алгебраические преобразования с последующим интегрированием

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ПРИМЕР

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x\,dx = \int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x\,dx =$$
$$= \int \quad \downarrow \quad \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) d\cos x =$$
$$= \int \left(\cos^5 x - \cos^7 x \right) d\cos x = \frac{\cos^6 x}{6} - \frac{\cos^8 x}{8} + C$$

Серия 1. Приведите подынтегральное выражение к виду, удобному для интегрирования		Серия 2. Найдите интеграл
1	$\int \cos^2 x \cdot \sin x\,dx$	1
2	$\int \cos 2x \cdot \sin^2 2x\,dx$	2
3	$\int \sin^3 x\,dx$	3
4	$\int \sin^5 3x\,dx$	4
5	$\int \sin 2x \cdot \sqrt{\cos x}\,dx$	5

Тест 3 Определите все слагаемые, входящие в состав первообразной,

для подынтегральной функции	$\sin x$	$-\cos x$	$-\frac{\sin^3 x}{3}$	$\frac{\cos^3 x}{3}$	$\frac{\sin^4 x}{4}$	$-\frac{\cos^4 x}{4}$	$-\frac{\sin^6 x}{6}$	$\frac{\cos^6 x}{6}$
$\int \cos^3 x\,dx$								
$\int \sin x \cdot \cos^3 x\,dx$								
$\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx$								
$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\,dx$								
$\int \sin^3 x\,dx$								

7 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЖДЕСТВ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 \begin{matrix} -\cos^2 x \\ -\sin^2 x \end{matrix} = \begin{matrix} \sin^2 x \\ \cos^2 x \end{matrix}$$

$$\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,x = 1$$

$$\begin{matrix} \mathrm{tg}^2 x \\ \mathrm{ctg}^2 x \end{matrix} + 1 = \begin{matrix} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \dfrac{1}{\sin^2 x} \end{matrix}$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \boxed{1 = \cos^2 x + \sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= -\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{tg}\,x + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \boxed{1 = \cos^2 x + \sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \mathrm{tg}^2 x \; d\,\mathrm{tg}\,x + \int d\,\mathrm{tg}\,x =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathrm{tg}\,x + C$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1	Докажите, что	$\mathbf{tg}\,x-\mathbf{ctg}\,x+C=\int\left(\mathbf{tg}^2x-\mathbf{ctg}^2x\right)dx$

2 Тренажер

	Найдите интеграл
1	$\int\left(\mathbf{tg}^2x+\mathbf{1}\right)dx=$
2	$\int\mathbf{tg}^2\,\mathbf{2}x\,dx=$
3	$\int\left[\mathbf{ctg}^2(-x)+\mathbf{1}\right]dx=$
4	$\int\left[\mathbf{ctg}^2\,\mathbf{3}x+\mathbf{ctg}^2(-\mathbf{3}x)\right]dx=$
5	$\int\left(\mathbf{tg}\,x+\mathbf{1}\right)^2dx=$

Серия **3** Найдите интеграл

1	$\int\left(\mathbf{tg}^2x\right)^{-1}\left(\mathbf{ctg}^2x\right)^{-1}dx$
2	$\int\dfrac{\sin\mathbf{4}x\,dx}{\cos^4x-\sin^4x}$
3	$\int\dfrac{\mathbf{tg}\,x}{\mathbf{ctg}\,x}\,dx=$
4	$\int\mathbf{tg}^2(x-\mathbf{1})\,dx=$
5	$\int\left(\cos^2x-\mathbf{ctg}^2x+\sin^2x\right)dx=$

8 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Возможная замена на другой символ

$\boxed{g(x)=*}$

$$\int f\big[g(x)\big]\,d\big[g(x)\big]= F\big[g(x)\big]+C$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int f\,[\;*\;]\,d\,[\;*\;]= F[\;*\;]+C$$

$$\int f\big[g(x)\big]\cdot g'(x)\,dx=\int f\big[g(x)\big]\,d\big[g(x)\big]=$$

$$=\int f\,[\,t\,]\;d\;t\;=F[\,t\,]+C=F\big[g(x)\big]+C$$

ПРИМЕР

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}}\,dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{\sin x}}\cos x\,dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{\sin x}}\,d\sin x=$$

$$=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[5]{\sin x}}\,d\sin x=\boxed{\sin x=t}=\int\frac{1-t^2}{\sqrt[5]{t}}\,dt=\int\frac{1}{\sqrt[5]{t}}\,dt-\int\frac{t^2}{\sqrt[5]{t}}\,dt=$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt[5]{t^4}-\frac{5}{11}t^2\sqrt[5]{t}+C=\boxed{t=\sin x}=\frac{5}{4}\sqrt[5]{\sin^4 x}-\frac{5}{11}\sin^2 x\sqrt[5]{\sin x}+C$$

Серия 1 Найдите интеграл

1	$\int\frac{1}{\sin\cos 3x}\,d\cos 3x=$
2	$\int\sin\cos x\,d\left(\cos x-\sqrt{3}\right)=$
3	$\int\cos\left(\sqrt{x-1}+3\right)d\sqrt{x-1}=$
4	$\int\frac{d\left(\ln x+\sqrt[4]{3}\right)}{\sin\left(\ln x-\sqrt[4]{3}\right)}=$
5	$\int\frac{d\left(x^2+3\ln 3\right)}{\cos\sqrt{3}x^2}=$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

2 Тренажер

По заданной $f[\,*\,]\cdot g'(x)$ восстановите $f[g(x)]$

1	$f[\,*\,]\cdot g'(x)=\mathbf{sin}[\,*\,]\cdot\mathbf{2}x\Rightarrow$
2	$f[\,*\,]\cdot g'(x)=\dfrac{\mathbf{1}}{[\,*\,]}\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{x}\Rightarrow$
3	$f[\,*\,]\cdot g'(x)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+[\,*\,]^2}\cdot\mathbf{ln}\lvert\mathbf{sin}\,x\rvert\Rightarrow$
4	$f[\,*\,]\cdot g'(x)=\mathbf{cos}[\,*\,]\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{x}}\Rightarrow$
5	$f[\,*\,]\cdot g'(x)=\dfrac{\mathbf{1}}{[\,*\,]}\cdot\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{cos}\,x}\,\mathbf{sin}\,x\Rightarrow$

3 Докажите, что $\int f[f(x)]\cdot f'(x)\,dx=F[f(x)]+C$

МАТРИЦА **4**	Для каждого интеграла				
ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ИНТЕГРАЛА	определите: интегрируемый множитель	определите: преобразованный дифференциал	определите: получившийся интеграл	осуществите замену	запишите окончательный результат
$\int \mathbf{cos}x\,\mathbf{sin}^3x\,dx$					
$\int \dfrac{\mathbf{tg}^2x}{\mathbf{cos}^2x}dx$					
$\int \dfrac{\mathbf{ln}x\,dx}{x}$					
$\int \dfrac{x\,dx}{\mathbf{1}+x^2}$					
$\int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{\mathbf{1}-x^6}}$					

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

9 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ПОВТОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Первое преобразование дифференциала

$$\int f\left\{g\left[\,p(x)\,\right]\right\}\cdot g'\left[\,p(x)\,\right]\cdot \boxed{p'(x)}\,dx =$$

Второе преобразование дифференциала

$$=\int f\left\{\,g\left[\,p(x)\,\right]\right\}\cdot \boxed{g'\left[\,p(x)\,\right]}\,d\,p(x) =$$

Табличный интеграл (*переменная интегрирования* $\boldsymbol{g[p(x)]}$)

$$=\int f\left\{g\left[\,p(x)\,\right]\right\}\,d\,g\left[\,p(x)\,\right] =$$

$$= F\left\{\,g\left[\,p(x)\,\right]\right\} + C$$

ПРИМЕР

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}\ \mathrm{tg}\sin^2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad = \int \mathrm{tg}\sin^2\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\ d\,x =$$

$$= 2\int \mathrm{tg}\sin^2\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\ d\sqrt{x} =$$

$$= 2\int \mathrm{tg}\sin^2\sqrt{x}\ \cdot\ \sin\sqrt{x}\ \ d\ \sin\sqrt{x} =$$

$$= \frac{2}{2}\int \boxed{\mathrm{tg}\ \sin^2\sqrt{x}}\ d\ \boxed{\sin^2\sqrt{x}} = -\ln\left|\cos\left(\sin^2\sqrt{x}\right)\right| + C$$

Для заданного интеграла	осуществите подходящую замену		восстановите подынтегральную функцию	
$\int ?\ d\ x^2 = \sin\left(x^2\right) + C$	1		1	
$\int ?\ d\sqrt{x} = \mathrm{tg}\sqrt{x} + C$	2		2	
$\int ?\ d\cos x = -\ln\lvert\cos\cos x\rvert + C$	3		3	
$\int ?\ d\ln x = \dfrac{(\ln x)^3}{3} + C$	4		4	
$\int ?\ d\sin x = \ln\left\lvert\mathrm{tg}\left(\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	5		5	

1 Тренажер

2 Тренажер

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Серия **2** Найдите интеграл

1 $$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x} \cdot \ln\sqrt{\ln x}}$$

2 $$\int \frac{\sin \ln x \, dx}{x \cdot \cos^2 \ln x}$$

3 $$\int \frac{e^{\sqrt{x}} \, dx}{\sqrt{x}\left(1 - 3e^{\sqrt{x}}\right)}$$

4 $$\int \frac{\cos 2\sqrt{\ln x} \, dx}{x \cdot \sqrt{\ln x} \cdot \sin 2\sqrt{\ln x}}$$

5 $$\int \frac{\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} \, dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1 - \frac{x}{4}}}$$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум. Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

Информационная схема

«ЭЛЕМЕТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ»

Линейность операции интегрирования

$$\int \left[\mathbf{A} \cdot f(x) \pm \mathbf{B} \cdot g(x) \right] dx = \mathbf{A} \cdot \int f(x)\, dx \pm \mathbf{B} \cdot \int g(x)\, dx$$

Триногометрические тождества

$$\mathbf{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\mathbf{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$\boxed{\cos(-x) = \\ = \cos x}$$

$$\boxed{\sin(-x) = \\ = -\sin x}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \sin^{2n} x \\ \cos^{2n} x \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2x \\ 1 + \cos 2x \end{pmatrix}^n}$$

$$\begin{array}{c} 2\sin \\ 2\cos \\ 2\sin \end{array} \left(\begin{array}{c} \\ kx \\ \\ \end{array} \right) \cdot \begin{array}{c} \sin \\ \cos \\ \cos \end{array} \left(\begin{array}{c} \\ px \\ \\ \end{array} \right) = \begin{array}{c} \cos \\ \cos \\ \sin \end{array} \left[\begin{array}{c} \\ (k-p)x \\ \\ \end{array} \right] \begin{array}{c} - \\ + \\ + \end{array} \begin{array}{c} \cos \\ \cos \\ \sin \end{array} \left[\begin{array}{c} \\ (k+p)x \\ \\ \end{array} \right]$$

Преобразование дифференциала

$$\int g\left[f(x)\right] \cdot \boxed{f'(x)}\, dx = \int g\left[\boxed{f(x)}\right] d\,\boxed{f(x)}$$

Замена переменной интегрирования

$$\boxed{g(x) = *}$$

$$\int f\left[g(x)\right] d\left[g(x)\right] = F\left[g(x)\right] + C$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\int f[\ *\ ]\, d[\ *\ ] = F[\ *\ ] + C$$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\int \left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)^2 d\alpha =$

2. $\int \dfrac{dx}{\sin(x-\pi)} =$

3. $\int y\,\mathrm{ctg}^2 y\,dy =$

4. $\int \dfrac{\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt[4]{x}}\,dx =$

5. $\int \left(\dfrac{1}{\mathrm{ctg}^2 x}+1\right)dx =$

6. $\int \left[\sin(2x+\pi)\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]dx =$

7. $\int e^x\cdot\sin e^x\cdot\cos^4 e^x\,dx =$

Вариант 2

1. $\int \dfrac{5-\ln(3x-2)}{2-3x}\,dx =$

2. $\int \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3\pi}{2}\right)dx =$

3. $\int \sin^6 x\,dx =$

4. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^3 x} =$

5. $\int [\cos\pi x\cdot\cos(\pi+x)]\,dx =$

6. $\int \left(\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 2x\right)dx =$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)} =$

Самостоятельная работа 2

Вариант 3

1 $\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 3x\, dx =$

2 $\int \dfrac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin x}\, dx =$

3 $\int \left(2 - 3x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{1}{3}} dx =$

4 $\int \dfrac{\sin^2 4x}{\cos^4 x - \sin^4 x}\, dx =$

5 $\int e^{\sqrt{x^2-1}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx =$

6 $\int \dfrac{\left(\mathrm{tg}^2 x\right)^{-1}\left(\mathrm{ctg}^2 x\right)^{-1}}{x^2}\, dx =$

7 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\cos^3 x \cdot \sin^5 x}} =$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум. Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

1 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ I ТИПА

Простейшая дробь I типа $\dfrac{\mathbf{R}}{x-\mathbf{r}}$ $(\mathbf{R},\mathbf{r}\ -\mathrm{const})$

Применяется, если количество простых множителей знаменателя равно или больше трех

Рассмотрим конкретный случай:

$$\frac{\mathbf{k}x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{p}}{\underbrace{(x-\mathbf{a})}_{I}\underbrace{(x-\mathbf{b})}_{II}\underbrace{(x-\mathbf{c})}_{III}}=\frac{\mathbf{A}}{\underbrace{x-\mathbf{a}}_{I}}+\frac{\mathbf{B}}{\underbrace{x-\mathbf{b}}_{II}}+\frac{\mathbf{D}}{\underbrace{x-\mathbf{c}}_{III}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{k}x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{p}=\mathbf{A}(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})+\mathbf{B}(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{c})+\mathbf{D}(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})$$

$$\Downarrow$$

Коэффициенты **A, B** *и* **D** *находятся* **методом подстановки**

$$\int\frac{\mathbf{k}x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{p}}{(x-\mathbf{a})(x-\mathbf{b})(x-\mathbf{c})}dx=\mathbf{A}\cdot\mathbf{ln}|x-\mathbf{a}|+\mathbf{B}\cdot\mathbf{ln}|x-\mathbf{b}|+\mathbf{D}\cdot\mathbf{ln}|x-\mathbf{c}|+C$$

ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

$$D=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\mathbf{A}_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{k}\mathbf{B}_j x^j}\qquad (k\le n)$$

Для удобства вычислений выписываются *все степени* переменной x ***числителя*** с соответствующими коэффициентами, среди которых могут оказаться и нулевые

$$\mathbf{A_n}x^{\mathbf{n}}+\mathbf{A_{n-1}}x^{\mathbf{n-1}}+\mathbf{A_{n-2}}x^{\mathbf{n-2}}+\ldots+\mathbf{A_2}x^{\mathbf{2}}+\mathbf{A_1}x+\mathbf{A_0}\ \Big|\ \mathbf{B_k}x^{\mathbf{k}}+\ldots+\mathbf{B_0}$$

Аналогично делению числителя на знаменатель неправильной дроби

$$\underbrace{R}_{\text{Целая часть дроби } D}$$

Остаток

$$\underbrace{\mathbf{Q_r}x^{\mathbf{r}}+\ldots+\mathbf{Q_0}}_{S}\ \Longrightarrow\ D=R+\frac{S}{\sum\limits_{j=0}^{r}\mathbf{B}_j x^k}$$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

	Серия **1** Разложите дробь на простейшие дроби	Серия **2** Найдите интеграл
$\dfrac{1}{x(x-1)}$		
$\dfrac{x}{(x-2)(x+1)}$		
$\dfrac{2x-1}{(x-1)x(x+2)}$		
$\dfrac{x^2}{(x+1)x(x-2)}$		
$\dfrac{2-x^2}{x\left(1-x^2\right)(x-2)}$		

МАТРИЦА **3**	Для каждой дроби		
РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ I ТИПА	выделите целую часть	разложите на простейшие дроби	найдите интеграл
$\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$			
$\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$			
$\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+4)}$			
$\dfrac{(2x-1)(3x-2)}{(4x-3)(3x-4)}$			
$\dfrac{(1-x)(1-3x)}{(1-2x)(4x-1)}$			

2 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ $\dfrac{k_1x^{n-1}+k_2x^{n-2}+\ldots+k_{n-1}x+k_n}{(x-a)^n}$ НА ПРОСТЕЙШИЕ II ТИПА

Простейшая дробь II типа
$$\frac{R}{(x-r)^n}\quad\begin{pmatrix}R, r\ -\text{const}\\ n\in N,\ n\neq 1\end{pmatrix}$$

Количество множителей знаменателя заданной дроби **равно** *количеству простейших дробей*

$$\frac{k_1x^{n-1}+k_2x^{n-2}+\ldots+k_{n-1}x+k_n}{(x-r)^n}=$$

Разложение на простейшие дроби II типа

$$=\frac{R_1}{(x-r)^n}+\frac{R_2}{(x-r)^{n-1}}+\ldots+\frac{R_{n-1}}{(x-r)^2}+\frac{R_n}{(x-r)}$$

Каждой простейшей дроби – соответствующий числовой коэффициент

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРВОГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ $\sum_1^n k_ix^{n-i}=\sum_1^n R_i(x-r)^{n-i}$

$$k_1x^{n-1}+k_2x^{n-2}+\ldots+k_{n-1}x+k_n=R_1+\underbrace{R_2(x-r)}_{0}+\ldots+\underbrace{R_{n-1}(x-r)^{n-2}}_{0}+\underbrace{R_n(x-r)^{n-1}}_{0}$$

Подстановка $\boxed{x=r}$

$$k_1r^{n-1}+k_2r^{n-2}+\ldots+k_{n-1}r+k_n=R_1$$

ПРИМЕР Определите значение коэффициента **A** в разложении дроби
$$\frac{2x^2+1}{(x-2)^3}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$$

Р е ш е н и е

при $x=2$ имеем
$$2\cdot x^2+1=A+B\cdot(x-2)+C\cdot(x-2)^2$$
$$2\cdot 2^2+1=A+B\cdot\ 0\ +C\cdot\ 0^2\ \Rightarrow\ A=9$$

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

$$A_1x^m+B_1x^{m-1}+C_1x^{m-2}+\ \ldots\ +R_1x+S_1=$$
$$=A_2x^m+B_2x^{m-1}+C_2x^{m-2}+\ \ldots\ +R_2x+S_2$$

$\Leftrightarrow$

x^m	$A_1=A_2$
x^{m-1}	$B_1=B_2$
…	…
x^1	$R_1=R_2$
x^0	$S_1=S_2$

ПРИМЕР

$$9+x^3+5x^2=Ax^3+B\left(x^2+x\right)+Dx+C$$
$$\underline{\underline{x^3}}+\underline{\underline{5x^2}}+\underline{0x}+9=\underline{\underline{Ax^3}}+\underline{\underline{Bx^2}}+\underline{(B+D)x}+C\ \Longrightarrow$$

x^3	$1=A$
x^2	$5=B$
x^1	$0=B+D\ \Rightarrow\ D=-5$
x^0	$9=C$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Тест 1 В разложении дроби $\dfrac{R(x)}{(x-\mathbf{a})^4} = \dfrac{\mathbf{A}}{(x-\mathbf{a})^4} + \dfrac{\mathbf{B}}{(x-\mathbf{a})^3} + \dfrac{\mathbf{C}}{(x-\mathbf{a})^2} + \dfrac{\mathbf{D}}{x-\mathbf{a}}$ определите значение коэффициента **A**

	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{x}{(x-\mathbf{1})^4}$													
$\dfrac{x^2+x}{(x+\mathbf{2})^4}$													
$\dfrac{x^3+\mathbf{3}x^2+x}{(x+\mathbf{3})^4}$													
$\dfrac{\mathbf{3}-\mathbf{2}x-x^2}{(x+\mathbf{4})^4}$													
$\dfrac{\mathbf{1}-x^3+\mathbf{5}x^2+x}{(x-\mathbf{5})^4}$													

2 Тренажер

	Определите значения коэффициентов	A	B	C
1	$x^2+x+\mathbf{1}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot(x-\mathbf{1})+\mathbf{C}\cdot(x-\mathbf{1})^2$			
2	$x^2-\mathbf{1}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot(x-\mathbf{2})+\mathbf{C}\cdot(x-\mathbf{2})^2$			
3	$\mathbf{2}x+\mathbf{1}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot(x+\mathbf{1})+\mathbf{C}\cdot(x+\mathbf{1})^2$			
4	$x^2-\mathbf{2}x-\mathbf{1}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot(x-\mathbf{2})+\mathbf{C}\cdot(x-\mathbf{2})^2$			
5	$\mathbf{3}x^2+\mathbf{2}x+\mathbf{1}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot x+\mathbf{C}\cdot x^2$			

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

3

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДРОБИ II ТИПА

Найдите интеграл $\int \frac{x^2+x}{(x-\mathbf{1})^3}dx$

Анализ

$$I=\int \frac{x^2+x}{(x-\mathbf{1})^3}dx=\int \frac{\mathbf{A}\,dx}{(x-\mathbf{1})^3}+\int \frac{\mathbf{B}\,dx}{(x-\mathbf{1})^2}+\int \frac{\mathbf{C}\,dx}{x-\mathbf{1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2+x}{(x-\mathbf{1})^3}=\frac{\mathbf{A}}{(x-\mathbf{1})^3}+\frac{\mathbf{B}}{(x-\mathbf{1})^2}+\frac{\mathbf{C}}{x-\mathbf{1}}$$

Решение

$$x^2+x=\mathbf{A}+\mathbf{B}(x-\mathbf{1})+\mathbf{C}(x-\mathbf{1})^2$$

Подстановка $x=\mathbf{1}$

$$\mathbf{1}^2+\mathbf{1}=\mathbf{A}\Rightarrow\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{1}}$$

Сравнение коэффициентов при x^2

$$\boxed{x^2}+x=\mathbf{1}+\mathbf{B}x-\mathbf{B}+\boxed{\mathbf{C}x^2}-\mathbf{2C}x+\mathbf{C}$$

$$\boxed{\mathbf{1}=\mathbf{C}}$$

Сравнение коэффициентов при x

$$x^2+\boxed{x}=\mathbf{1}+\boxed{\mathbf{B}x}-\mathbf{B}+x^2\boxed{-\mathbf{2}x}+\mathbf{1}$$

$$\mathbf{1}=\mathbf{B}-\mathbf{2}\Rightarrow\boxed{\mathbf{B}=\mathbf{3}}$$

$$I=\int \frac{x^2+x}{(x-\mathbf{1})^3}dx=\int \frac{dx}{(x-\mathbf{1})^3}+\int \frac{\mathbf{3}dx}{(x-\mathbf{1})^2}+\int \frac{dx}{x-\mathbf{1}}=$$

$$=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}(x-\mathbf{1})^2}-\frac{\mathbf{3}}{x-\mathbf{1}}+\mathbf{ln}\left|x-\mathbf{1}\right|+C$$

1 Тренажер	разложите подынтегральную функцию на простейшие дроби	Для каждого интеграла	найдите первообразную	**2** Тренажер
1		$\int \frac{x\,dx}{(x-\mathbf{1})^3}$		1
2		$\int \frac{(x^2+\mathbf{1})dx}{x(x-\mathbf{1})^2}$		2
3		$\int \frac{(x+\mathbf{1})dx}{x^2(x-\mathbf{1})}$		3
4		$\int \frac{(x^2+\mathbf{1})dx}{(x+\mathbf{1})(x^2-\mathbf{1})}$		4
5		$\int \frac{(x^3+x)dx}{(x-\mathbf{1})(x^2-\mathbf{1})}$		5

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Серия **3** Найдите интеграл

1 $\int \frac{dx}{x^3-4x^2} =$

2 $\int \frac{x+1}{x^3+3x^2+27x+27}\,dx =$

3 $\int \frac{x^2}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2+6x+9\right)}\,dx =$

4 $\int \frac{\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-2x+1\right)x^2}\,dx =$

5 $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx =$

4 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА В ПРИВЕДЕННОМ КВАДРАТНОМ ТРЕХЧЛЕНЕ

Приведенный квадратный трехчлен $x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q} =$

Определение элементов полного квадрата $= \left(x^2 \pm \mathbf{2} \cdot \boxed{x} \boxed{\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}} \right) + \mathbf{q} =$

Выделение полного квадрата $= \Bigg[\underbrace{x^2 \pm \mathbf{2} \cdot x \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}} + \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\right)^2}_{\text{Составление полного квадрата}} \Bigg] \underbrace{- \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\right)^2}_{\text{Компенсация}} + \mathbf{q} =$

$$= \underbrace{\left(x \pm \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}} \right)^2}_{\textbf{Полный квадрат}} + \underbrace{\mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{4}}}_{\pm \mathbf{a}^2}$$

«Свободный» параметр

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА В НЕПРИВЕДЕННОМ КВАДРАТНОМ ТРЕХЧЛЕНЕ

Неприведенный квадратный трехчлен

$$\mathbf{A}x^2 \pm \mathbf{B}x + \mathbf{C} =$$

$$= \mathbf{A} \cdot \left(x^2 \pm \underbrace{\boxed{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}}}_{\mathbf{p}} x + \underbrace{\boxed{\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}}}_{\mathbf{q}} \right) =$$

$$= \mathbf{A} \cdot \left(x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q} \right) = \mathbf{A} \cdot \Bigg[\underbrace{\left(x \pm \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}} \right)^2}_{\text{Полный квадрат}} + \underbrace{\mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{4}}}_{\pm \mathbf{a}^2} \Bigg]$$

ПРИМЕР

$$\int \left(\mathbf{3}x^2 + \mathbf{2}x - \mathbf{1} \right) dx =$$

$$= \mathbf{3}\int x^2 dx + \mathbf{2}\int x dx - \int dx$$

Не требуются дополнительные преобразования

ПРИМЕР

$$\int \frac{dx}{\mathbf{3}x^2 + \mathbf{2}x - \mathbf{1}} =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \right)^2 - \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}}$$

Дополнительные преобразования необходимы

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР

$$\int\left(x^2-3x+4\right)dx=$$
$$=\int x^2\,dx+\int(-3x)\,dx+\int 4\,dx=$$
$$=\int x^2\,dx-3\int x\,dx+4\int dx=$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x+C$$

ПРИМЕР

$$\int\left(x^2-3x+4\right)dx=$$
$$=\int\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{16}{4}\right]dx=$$
$$=\int\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx+\frac{7}{4}\int dx=$$
$$=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{7x}{4}+C$$

Сравните результаты!

Тест **1** Определите «свободный» параметр

	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
x^2+2x+5											
x^2+4x+9											
$x^2+6x+12$											
$x^2+12x+34$											
$x^2+14x+48$											

1 Тренажер

Выделите полный квадрат

1	$9x^2-6x+1=$
2	$4x^2+2x=$
3	$4x^2-2x+3=$
4	$2x^2+4x-1=$
5	$5x^2+x-1=$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

5 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБИ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗНАМЕНАТЕЛЕМ

Теория

$$\frac{1}{\mathbf{A}\,x^2 \pm \mathbf{B}\,x + \mathbf{C}} = \frac{1}{\mathbf{A}\left(x^2 \pm \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}x\right) + \mathbf{C}} = \frac{1}{\mathbf{A}\left(x^2 \pm 2\cdot\frac{\mathbf{B}}{2\mathbf{A}}x + \frac{\mathbf{B}^2}{4\mathbf{A}^2}\right) - \frac{\mathbf{B}^2}{4\mathbf{A}} + \mathbf{C}} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{A}\left(x \pm \frac{\mathbf{B}}{2\mathbf{A}}\right)^2 + \mathbf{C} - \frac{\mathbf{B}^2}{4\mathbf{A}}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\mathbf{A}}\,x \pm \frac{\mathbf{B}}{2\sqrt{\mathbf{A}}}\right)^2 + \frac{4\mathbf{AC} - \mathbf{B}^2}{4\mathbf{A}}} = \frac{1}{(\mathbf{p}x \pm \mathbf{q})^2 + \left(\pm \mathbf{a}^2\right)}$$

Реализация

$$\frac{1}{3x^2 \pm 2x - 1} = \frac{1}{3\left(x^2 \pm \frac{2}{3}x\right) - 1} = \frac{1}{3\left(x^2 \pm 2\cdot\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3\left(x \pm \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}x \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3}}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ВИДА $\int\frac{dx}{x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q}}$

$$\int\frac{dx}{x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q}} =$$

$$\underbrace{\pm\left(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}^2}{4}\right)}_{\pm\mathbf{a}^2}$$

$$\int\frac{dx}{\left(x \pm \frac{\mathbf{p}}{2}\right)^2 + \mathbf{a}^2} = \frac{1}{\mathbf{a}}\,\mathbf{arctg}\,\frac{x \pm \frac{\mathbf{p}}{2}}{\mathbf{a}} + C$$

$$\int\frac{dx}{\left(x \pm \frac{\mathbf{p}}{2}\right)^2 - \mathbf{a}^2} = \frac{1}{2\mathbf{a}}\,\mathbf{ln}\left|\frac{x \pm \frac{\mathbf{p}}{2} - \mathbf{a}}{x \pm \frac{\mathbf{p}}{2} + \mathbf{a}}\right| + C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР

$$\int\frac{dx}{3x^2+2x-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ln\left|\frac{x+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+3}\right|+C$$

1 Докажите, что интеграл $\int\frac{dx}{a^2-p^2-(kx)^2+2kpx}$ можно привести к виду, удобному для интегрирования $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$

МАТРИЦА **2**	Для каждого интеграла		
ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА	выделите в знаменателе полный квадрат	приведите подынтегральную функцию к виду, удобному для интегрирования	найдите первообразную
$\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$			
$\int\frac{dx}{x^2-2x+3}$			
$\int\frac{dx}{2x^2+12x+5}$			
$\int\frac{dx^2}{2x^4-x^2+1}$			
$\int\frac{d\sqrt{x}}{3x-\sqrt{x}+2}$			

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

6 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ВИДА $\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q}}}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q}}} =}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x \pm \frac{\mathbf{p}}{2}\right)^2 + \mathbf{a}^2}} =$$

$$= \ln\left| x \pm \frac{\mathbf{p}}{2} + \sqrt{\left(x \pm \frac{\mathbf{p}}{2}\right)^2 + \mathbf{a}^2} \right| + C$$

$$= \ln\left| x \pm \frac{\mathbf{p}}{2} + \sqrt{x^2 + \mathbf{p}x + \mathbf{q}} \right| + C$$

$$\underbrace{\mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}^2}{4}}_{\mathbf{a}^2}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q}}} =}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2 \mp \mathbf{p}x - \mathbf{q}\right)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\mathbf{a}^2 - \left(x \pm \frac{\mathbf{p}}{2}\right)^2}} =$$

$$+\arcsin \frac{x \pm \frac{\mathbf{p}}{2}}{\mathbf{a}} + C \qquad -\arccos \frac{x \pm \frac{\mathbf{p}}{2}}{\mathbf{a}} + C$$

ПРИМЕР

Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 4x^2 - 8}}$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\underbrace{-4x^2 + 12x - 8}_{\substack{\text{Приведение} \\ \text{трехчлена} \\ \text{к стандартному виду}}}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\underbrace{\left(4x^2 - 12x\right)}_{\text{Изменение знака}} - 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\underbrace{\left(4x^2 - 12x + 9\right)}_{\substack{\text{Выделение} \\ \text{полного квадрата}}} + 9 - 8}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\underbrace{1 - \left(2x - 3\right)^2}_{\substack{\text{Преобразование} \\ \text{к виду,} \\ \text{удобному для интегрирования}}}}} \qquad = \frac{1}{2}\arcsin\left(2x - 3\right) + C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

МАТРИЦА 1	Для каждого интеграла		
ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА	выделите под корнем полный квадрат	приведите подынтегральную функцию к табличному виду	найдите первообразную
$\int \frac{dx}{\sqrt{2(1-x)^2+1}}$			
$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+4}}$			
$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+2}}$			
$\int \frac{dx}{\sqrt{6-4(x-1)^2}}$			
$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x-2x^2}}$			

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум. Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

7 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБЕЙ ВИДА $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ И $\frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+px+q}}$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}\,dx =$$

Выделение в числителе производной знаменателя

$$= \frac{M}{2}\int \frac{\boxed{(2x+p)}+\left(\frac{2N}{M}-p\right)}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\left[\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(\frac{2N}{M}-p\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\right] =$$

$$\int \frac{R'(x)}{R(x)}\,dx = \ln|R(x)|+C$$

Выделение полного квадрата

$$= \frac{M}{2}\left[\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{M}\underbrace{\qquad\qquad}_{}\right] = \ldots$$

Аналогично для дроби вида $\frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+px+q}}$

ПРИМЕР

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+7x+1}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}\cdot 5}{\sqrt{x^2+7x+1}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+7)+\left(\frac{10}{3}-7\right)}{\sqrt{x^2+7x+1}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+7x+1}}\,dx - \frac{11}{3}\int \frac{d\left(x+\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(1-\frac{7^2}{4}\right)}}\right] =$$

$$\int \frac{R'(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = 2\sqrt{R(x)}+C$$

$$= \frac{3}{2}\left[2\sqrt{x^2+7x+1} - \frac{11}{3}\cdot\ln\left|x+\frac{7}{2}+\sqrt{x^2+7x+1}\right|\right]+C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

1 Тренажер | **2** Тренажер

	Выделите в числителе производную знаменателя дроби		Выделите полный квадрат в знаменателе дроби	
1		$\dfrac{2x-3}{x^2-2x-2}$		1
2		$\dfrac{4x-3}{x^2-2x+2}$		2
3		$\dfrac{x-3}{2x^2-x+2}$		3
4		$\dfrac{5x+7}{x^2+5x+7}$		4
5		$\dfrac{3x+1}{x-7x^2+1}$		5

Серия **3** Приведите подынтегральное выражение Серия **4**

к виду, удобному для интегрирования				и найдите интеграл
	1	$\displaystyle\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+2x+3}$	1	
	2	$\displaystyle\int\frac{(x-1)dx}{x^2-3x+1}$	2	
	3	$\displaystyle\int\frac{(3x-2)dx}{x^2+x+1}$	3	
	4	$\displaystyle\int\frac{(5x-2)dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}$	4	
	5	$\displaystyle\int\frac{(1-3x)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$	5	

8 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ III ТИПА

$$\frac{R(x)}{\left(x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}\right)\left(x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{n}\right)}=$$

Число множителей знаменателя равно количеству простейших дробей

$$=\frac{\mathbf{P}x+\mathbf{Q}}{\left(x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}\right)}+\frac{\mathbf{M}x+\mathbf{N}}{\left(x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{n}\right)}$$

Для каждой дроби –
свой **квадратичный** *знаменатель*
свой **линейный** *числитель*

Простейшая дробь III типа

$$\frac{\mathbf{M}x+\mathbf{N}}{x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}}\quad\left(\left.\begin{matrix}\mathbf{M},\mathbf{N}\\ \mathbf{p},\mathbf{q}\end{matrix}\right\}-\mathbf{const}\right)$$

$$\left[\mathbf{D}=\mathbf{p}^2-4\mathbf{q}<0\right]$$

Параметры числителей *простейших дробей находятся* ***методом неопределенных коэффициентов***

ПРИМЕР

$$\int\frac{5x^3+21x+8}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx=\underbrace{\int\frac{\mathbf{A}x+\mathbf{B}}{\left(x^2+1\right)}dx}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{\mathbf{M}x+\mathbf{N}}{\left(x^2+9\right)}dx}_{I_2}=I$$

$$5x^3+21x+8=(\mathbf{A}x+\mathbf{B})\left(x^2+9\right)+(\mathbf{M}x+\mathbf{N})\left(x^2+1\right)$$

$$\underline{\underline{\underline{5x^3}}}+\underline{\underline{0x^2}}+\underline{21x}+8=\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}x^3}}}+\underline{\underline{\mathbf{B}x^2}}+\underline{9\mathbf{A}x}+9\mathbf{B}+$$
$$+\underline{\underline{\underline{\mathbf{M}x^3}}}+\underline{\underline{\mathbf{N}x^2}}+\underline{\mathbf{M}x}+\mathbf{N}$$

x^3	$5=\mathbf{M}+\mathbf{A}$ $\Rightarrow$	$\mathbf{M}=5-\mathbf{A}$ $\Rightarrow$	$\mathbf{M}=3$
x^2	$0=\mathbf{B}+\mathbf{N}$ $\Rightarrow$	$\mathbf{B}=-\mathbf{N}$ $\Rightarrow$	$\mathbf{N}=-8$
x^1	$21=9\mathbf{A}+\mathbf{M}$ $\Rightarrow$	$21=8\mathbf{A}+\underbrace{\mathbf{M}+\mathbf{A}}_{5}$ $\Rightarrow$	$\mathbf{A}=2$
x^0	$8=9\mathbf{B}+\mathbf{N}$ $\Rightarrow$	$8=\mathbf{B}+\underbrace{\mathbf{B}+\mathbf{N}}_{0}$ $\Rightarrow$	$\mathbf{B}=8$

$$I_1=\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx==\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$I_2=\int\frac{3x+1}{\left(x^2+9\right)}dx==\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+9}+\int\frac{dx}{x^2+9}$$

$$I=\ln\left(x^2+1\right)-\mathbf{arctg}\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)+\frac{1}{3}\mathbf{arctg}\left(x^2+1\right)+C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Тест 1

$$\frac{R(x)}{(x^2+4)(x^2+25)} = \frac{\mathbf{A}x+\mathbf{B}}{x^2+4} + \frac{\mathbf{M}x+\mathbf{N}}{x^2+25}$$

Определите значения **A**, **B**, **C** и **D**, если

A	3	3	1	1	1	2	2
B	1	1	2	3	3	3	1
M	2	2	1	3	2	3	3
N	1	4	1	2	1	2	1
$R(x)=5x^3+5x^2+62x+83$							
$R(x)=2x^3+3x^2+29x+52$							
$R(x)=5x^3+5x^2+83x+41$							
$R(x)=5x^3+2x^2+83x+29$							
$R(x)=5x^3+2x^2+62x+29$							

2 Тренажер | **3** Тренажер

	запишите разложение на простейшие	Для каждой дроби	найдите первообразную	
1		$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$		1
2		$\frac{x-3}{(x^2+1)(x^2+2)}$		2
3		$\frac{2x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+2)}$		3
4		$\frac{4x^3+2x^2+5x+7}{(x^2+1)(x^2+2)}$		4
5		$\frac{2x^3+3x}{(x^2+1)(x^2+2)}$		5

9 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР РАЗЛОЖЕНИЯ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ РАЗНЫХ ТИПОВ

Разложите дробь $R=\dfrac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}$ на простейшие и найдите интеграл

Анализ

$$\underbrace{\frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}}_{\text{«Правильная» дробь}} = \underbrace{\frac{A}{x+2}}_{\text{Метод подстановки}} + \underbrace{\frac{Mx+N}{x^2+x+1}}_{\text{Метод неопределенных коэффициентов}}$$

Решение

Метод подстановки

$$2x^2+x+3 = A\cdot(x^2+x+1) + (Mx+N)\cdot(x+2)$$

$$x=2 \;\Rightarrow\; 2\cdot4-4+3 = A\cdot(4-2+1) \;\Rightarrow\; \boxed{A=3}$$

Метод неопределенных коэффициентов

$$2x^2+\underline{\underline{x}}+\underline{3} = 3x^2+\underline{\underline{3x}}+\underline{3}+$$
$$+Mx^2+\underline{\underline{(N+2M)x}}+\underline{2N}$$

x^0	$3=3+2N \;\Rightarrow\; \boxed{N=0}$
x^1	$1=3+0+2M \;\Rightarrow\; \boxed{M=-1}$

$$\boxed{R=\frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}=\frac{3}{x+2}-\frac{x}{x^2+x+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int R(x)dx=\int\left[\frac{3}{x+2}-\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]dx=$$

$$=3\ln|x+2|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Серия **1** Найдите интеграл

1 $\int \frac{dx}{(x+\mathbf{1})(x^2+\mathbf{1})} =$

2 $\int \frac{dx}{(x-\mathbf{2})^2(x^2-\mathbf{5}x+\mathbf{6})} =$

3 $\int \frac{dx}{x^3+\mathbf{1}} =$

4 $\int \frac{x\,dx}{x^3-\mathbf{1}} =$

5 $\int \frac{(x^5+x^4-\mathbf{8})\,dx}{x^3-\mathbf{4}x} =$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

10 ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ ВИДА $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,df(x) = \boxed{\ln\left|f(x)\right| + C}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБИ ВИДА $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,df(x) = \boxed{2\sqrt{f(x)} + C}$$

При интегрировании любой дроби полезно предварительно исследовать ее на наличие в числителе производной от функции в знаменателе!

ПРИМЕР

$$\int \frac{\sin 3x\,dx}{\sqrt{7-\cos 3x}} = \boxed{\begin{gathered}(7-\cos 3x)' = \\ = 3\sin 3x\end{gathered}} = \frac{1}{3}\int \frac{3\sin 3x\,dx}{\sqrt{7-\cos 3x}} = \frac{2}{3}\sqrt{7-\cos 3x} + C$$

ПРИМЕР

$$I = \int \frac{4\cos t + 6}{\cos^2 t + 3\cos t + 1}\,d\cos t = ?$$

Решение

$$I = \int \frac{4x+6}{x^2+3x+1}\,dx = \int \frac{[4x+6] + 1}{x^2+3x+1}\,dx =$$

$\boxed{\cos t = x}$

$$= \int \frac{4x+7}{x^2+3x+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+3x+1}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{2x+3}{x^2+3x+\frac{1}{4}}\,dx + \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - 2}\,dx =$$

$$= 2\ln\left|x^2+3x+\frac{1}{4}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\sqrt{2}}{x+\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= 2\ln 2\left|4x^2+12x+1\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2x+3-2\sqrt{2}}{2x+3+2\sqrt{2}}\right| + C$$

$\boxed{x = \cos t}$

$$I = 2\ln 2\left|4\cos^2 t + 12\cos t + 1\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\cos t + 3 - 2\sqrt{2}}{2\cos t + 3 + 2\sqrt{2}}\right| + C$$

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

	Для интеграла вида $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ или $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$	восстановите числитель подынтегральной функции	найдите результат интегрирования
1	$\int \frac{?}{\cos^2 x}dx$	**1** Тренажер	**2** Тренажер
2	$\int \frac{?}{\sqrt{\sin^2 x+1}}dx$		
3	$\int \frac{?}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$		
4	$\int \frac{?}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$		
5	$\int \frac{?}{\sin x\cos x}dx$		

Тест **5** Результат интегрирования	можно получить по формуле				нельзя получить по формуле $\frac{f'(x)}{f(x)}$ или $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$
	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$ при умножении на число	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ при умножении на число	
$\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x}$					
$\int \frac{(\cos x-1)dx}{\sqrt{x-\sin x}}$					
$\int \frac{\cos x\sin x dx}{\sqrt{\sin^2 x-2}}$					
$\int \frac{(\cos x-\sin 2x+1)dx}{\sin x+2\cos x+x}$					
$2\int \frac{\left(\frac{\sin 2x}{2}+\cos 2x-x\right)dx}{\sin^2 x+\sin 2x-x^2}$					

Информационная схема
«ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ»

Выделение полного квадрата

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q}} =$$

$$\mathbf{A}x^2 \pm \mathbf{B}x + \mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\left(x^2 \pm \boxed{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}}\,x + \boxed{\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}}\right) =$$

$$= \mathbf{A}\cdot\left(x^2 \pm \mathbf{p}\,x + \mathbf{q}\right) = \mathbf{A}\cdot\left[\underbrace{\left(x+\frac{\mathbf{p}}{2}\right)^2}_{\text{Полный квадрат}} + \underbrace{\mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}^2}{4}}_{\pm \mathbf{a}^2}\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \mathbf{p}x + \mathbf{q}}} =$$

$$\int \frac{\mathbf{M}x+\mathbf{N}}{\sqrt{x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}}}\,dx = \frac{\mathbf{M}}{2}\int \frac{2x + \frac{2\mathbf{N}}{\mathbf{M}}}{\sqrt{x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}}}\,dx =$$

$$\left(x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}\right)' = 2x+\mathbf{p}$$

$$= \frac{\mathbf{M}}{2}\int \frac{\boxed{(2x+\mathbf{p})} + \left(\frac{2\mathbf{N}}{\mathbf{M}} - \mathbf{p}\right)}{\sqrt{x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}}}\,dx =$$

$$\int \frac{R'(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = 2\sqrt{R(x)} + C$$

Аналогично для

$$\int \frac{\mathbf{M}x+\mathbf{N}}{x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}}\,dx$$

$$\int \frac{R'(x)}{R(x)}\,dx = \ln\left|R(x)\right| + C$$

Простейшие дроби

I тип

$$\frac{\mathbf{R}}{x-\mathbf{r}}$$

$\mathbf{r}$ – const

$$\frac{\mathbf{k}_1 x^{\mathbf{n}-1} + \ldots + \mathbf{k}_{\mathbf{n}-1}}{(x-\mathbf{a}_1)\ldots(x-\mathbf{a}_\mathbf{n})} =$$

Метод подстановки

$$= \frac{\mathbf{R}_1}{(x-\mathbf{a}_1)^\mathbf{n}} + \ldots + \frac{\mathbf{R}_\mathbf{n}}{(x-\mathbf{a}_\mathbf{n})}$$

$$\frac{\mathbf{k}_1 x^{\mathbf{n}-1} + \ldots + \mathbf{k}_{\mathbf{n}-1}x + \mathbf{k}_\mathbf{n}}{(x-\mathbf{r})^\mathbf{n}} =$$

Методы подстановки и неопределенных коэффициентов

$$= \frac{\mathbf{R}_1}{(x-\mathbf{r})^\mathbf{n}} + \ldots + \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{n}-1}}{(x-\mathbf{r})^2} + \frac{\mathbf{R}_\mathbf{n}}{(x-\mathbf{r})}$$

II тип

$$\frac{\mathbf{R}}{(x-\mathbf{r})^\mathbf{n}}$$

$\mathbf{R}, \mathbf{r}$ – const
$\mathbf{n} \in \mathbf{N},\ \mathbf{n} \neq 1$

$$\frac{R(x)}{\left(x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}\right)\left(x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{n}\right)} =$$

Метод неопределенных коэффициентов

$$= \frac{\mathbf{P}x+\mathbf{Q}}{\left(x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}\right)} + \frac{\mathbf{M}x+\mathbf{N}}{\left(x^2+\mathbf{m}x+\mathbf{n}\right)}$$

III тип

$$\frac{\mathbf{M}x+\mathbf{N}}{x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}} \quad \left(\left.\begin{matrix}\mathbf{M}, \mathbf{N}\\ \mathbf{p}, \mathbf{q}\end{matrix}\right\} - \text{const}\right)$$

$$\left[\mathbf{D} = \mathbf{p}^2 - 4\mathbf{q} < 0\right]$$

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $\int \frac{d(2t)}{4t^2+4t+2} =$

2. $\int \frac{dy}{\sqrt{7+6y-y^2}} =$

3. $\int \frac{x+1}{x^3+5x^2+6x}\,dx =$

4. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx =$

5. $\int \frac{dx}{2x^2-8x-10} =$

6. $\int \frac{x^3+x}{x^3-8}\,dx =$

7. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} =$

Вариант 2

1. $\int \frac{dx}{(x+1)^2+2x} =$

2. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3\cos^2 x+6\sin x}} =$

3. $\int \frac{d\sqrt{2m}}{\sqrt{4m+2\sqrt{m}-1}} =$

4. $\int \frac{x\,dx}{1-x^4} =$

5. $\int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4} =$

6. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x} =$

7. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+1} =$

Самостоятельная работа 3

Вариант 3

1 $\int \frac{\mathbf{e}^{2x-1} dx}{\mathbf{e}^{2x-1}-1}$

2 $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}} =$

3 $\int \frac{x^4+5x^3+4x^2-28x-20}{(x+2)(x^2+6x+13)} dx =$

4 $\int \frac{3x-x^2-2}{(x+1)^2} d\ln x =$

5 $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x+1}{\mathrm{ctg} x\sqrt{5+\mathrm{tg} x-\mathrm{tg}^2 x}} dx =$

6 $\int \frac{x^3 dx}{x^4-x^2+2} =$

7 $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3} dx =$

Использованная литература

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991.

2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Наука., Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

3. Данко Е.П., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов: В 2 ч. Ч 1. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 8-е изд., стереотип. – М.: Наука., Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.

5. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие / Вавилов В.В., Мельников И.И, Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум. Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

Дифференцирование

$f'(x) \longleftarrow \longleftarrow \longleftarrow f(x)$

$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\frac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$
$\mathbf{n}x^{\mathbf{n}-1}$	$x^{\mathbf{n}}$	$\frac{x^{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{n}+1}$
$-\frac{\mathbf{n}}{x^{\mathbf{n}+1}}$	$\frac{1}{x^{\mathbf{n}}}$	$-\frac{1}{(\mathbf{n}+1)x^{\mathbf{n}-1}}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$-\frac{1}{x^2\cdot\ln a}$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$\log_a\lvert x\rvert$
$a^x\cdot\ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x	e^x
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos x}=\sec x$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert$

$f(x) \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \int f(x)\,dx$

Интегрирование $+C$

Резник Н.А., Казакова Г.Б. "Неопределенный интеграл". Визуальный конспект-практикум.
Выпуск II. Часть 1-я. – Мурманск: Изд-во МГТУ, 1998. – 76 с.

Дифференцирование

$f'(x) \longleftarrow \longleftarrow \longleftarrow f(x)$

$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x$ $-\operatorname{arcctg} x$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ $-\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x-1}{x+1}\right\rvert$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $-\arccos x$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$ $-\arccos\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm 1}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert$

$f(x) \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \int f(x)\,dx$ $+C$

Интегрирование

Неопределенный интеграл

Визуальный конспект-практикум

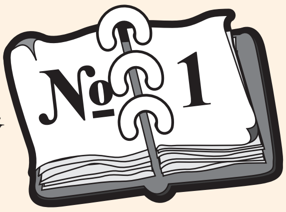
Выпуск I

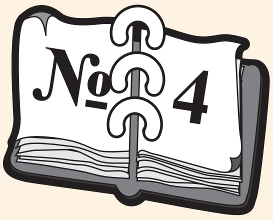
Начальные представления о технике интегрирования

Выпуск II
Часть1

Простейшие методы интегрирования

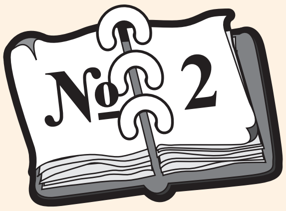
ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

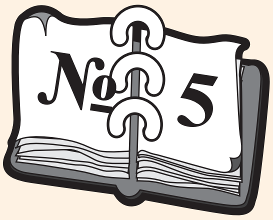




АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТАБЛИЧНОГО ИНТЕГРАЛА

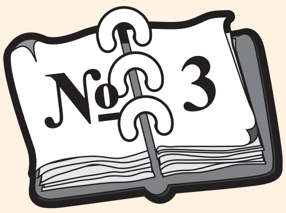
ЛИНЕЙНОСТЬ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

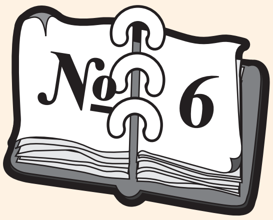




ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

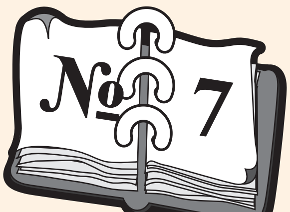
ПАРАМЕТРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ



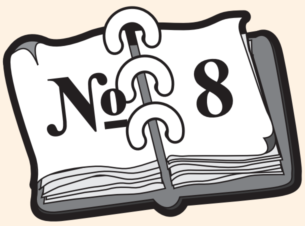


ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Выпуск II
Часть2



Общие методы и частные приемы интегрирования



ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ЧАСТНЫЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ